Athletica Galactica

Kárpát-medencei Középiskolai Csillagászati és Asztrofizikai Verseny

2022/2023

Döntő – DA

2023. március 24–26.

Bakonybél

Versenyző
kódja / évfolyama

................/ ....

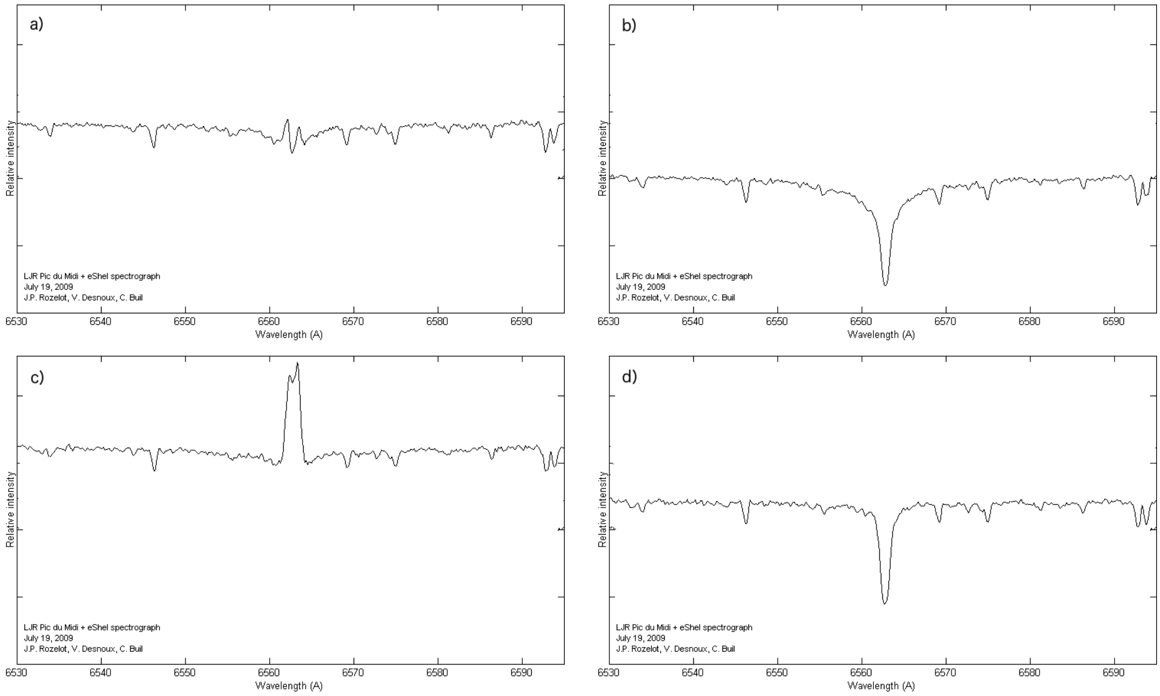
A kódodat minden oldalon (a pótlapokon is) add meg!

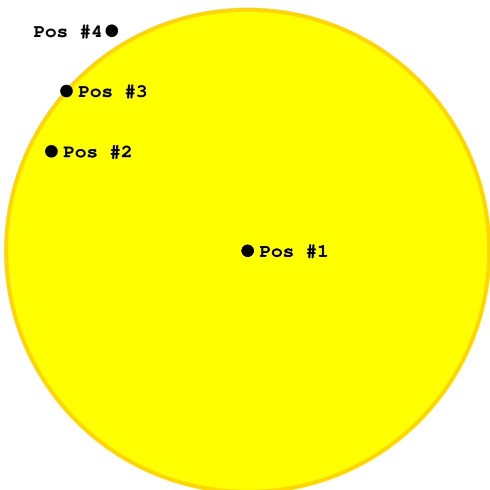
Elért pontszám: ..../ 100

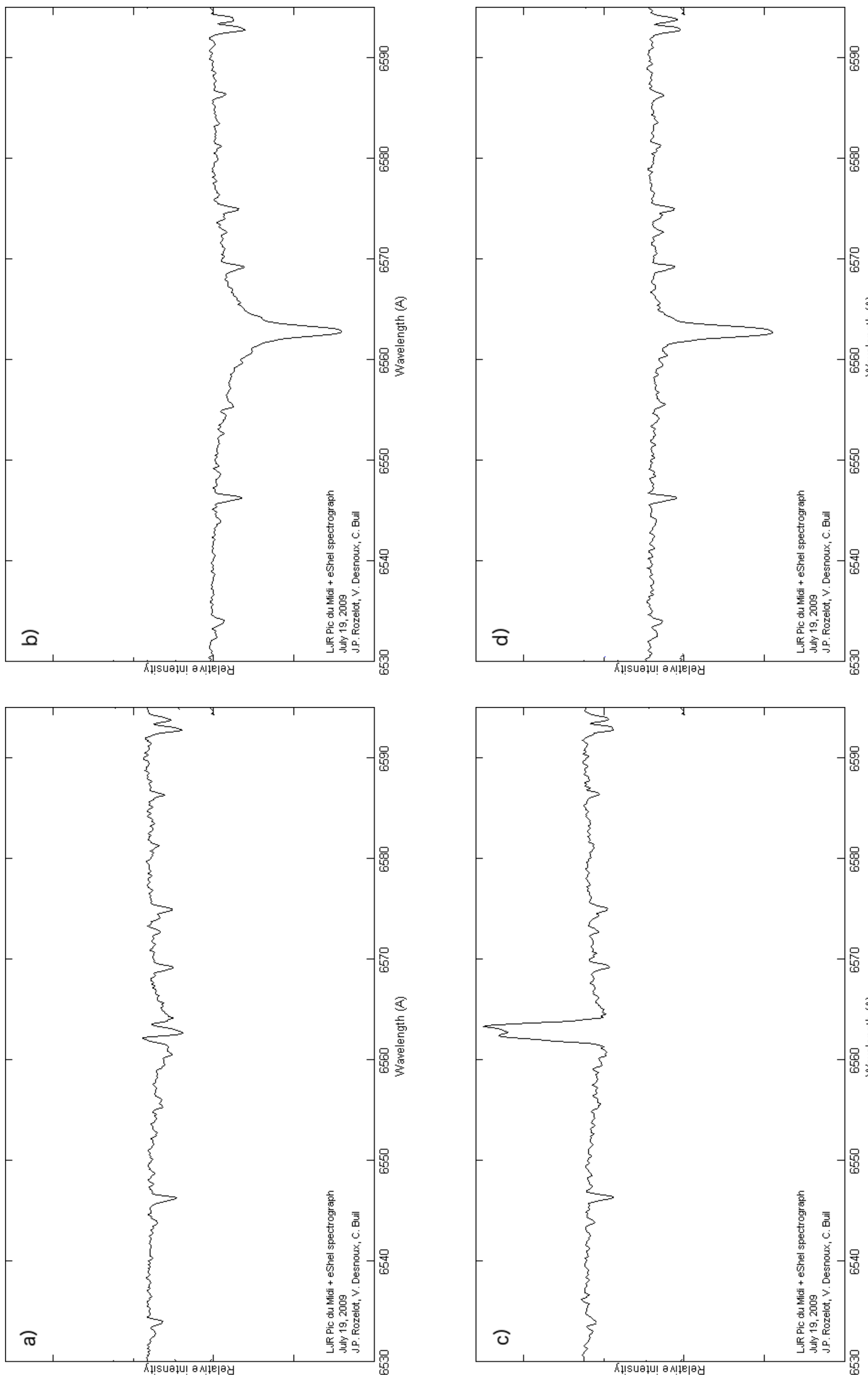
1. „Színképelemzés” Naprendszeren innen és túl **20 p**

Az elektromágneses sugárzás rengeteg információt hordoz a csillagászati objektumokról. Ennek kinyeréséhez a csillagászok különböző hullámhosszakon tanulmányozzák az objektumokról hozzánk érkező sugárzást: előállítják és rögzítik az objektumok színképét. Az összetett fényt prizmával már Newton sikeresen színekre bontotta, Fraunhofer pedig már olyan minőségű színképet tudott előállítani, amelyben akkor még ismeretlen eredetű sötét vonalak is megfigyelhetők voltak. Ma a teljes elektromágneses hullámhossztartományban képesek vagyunk színképek rögzítésére, bár a különböző hullámhosszúságú vagy frekvenciájú sugárzásokhoz más és más módszerek szükségesek. A következő feladatban egy nagyon közeli és több nagyon távoli csillagászati objektum színképei alapján kell néhány kérdésre válaszolnod.

a) Az alábbi négy ábrán – a következő oldalon külön, kicsit nagyobb méretben is megtalálhatók – a Nap színképének ugyanazon hullámhossztartománya látható. A színképek 2009. július 19-én készültek a Pic du Midi Obszervatórium 50 cm-es naptávcsövére szerelt eShel echelle spektrográffal, mégpedig úgy, hogy a távcső a színképek rögzítésekor négy, egymástól némileg eltérő irányba nézett, amelyek a színképek alatti napkorong-ábrán a `Pos #i (i = 1, 2, 3, 4)` címkékkel meg is vannak jelölve. Párosítsd össze az a) – d) színképeket a számokkal jelölt pozíciókkal, és nagyon röviden indokold is a válaszaidat! (8 p)



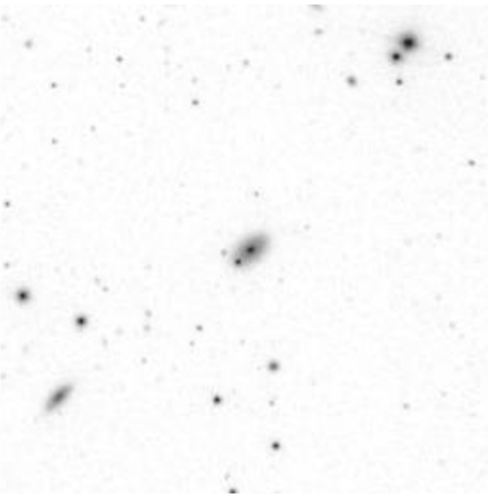


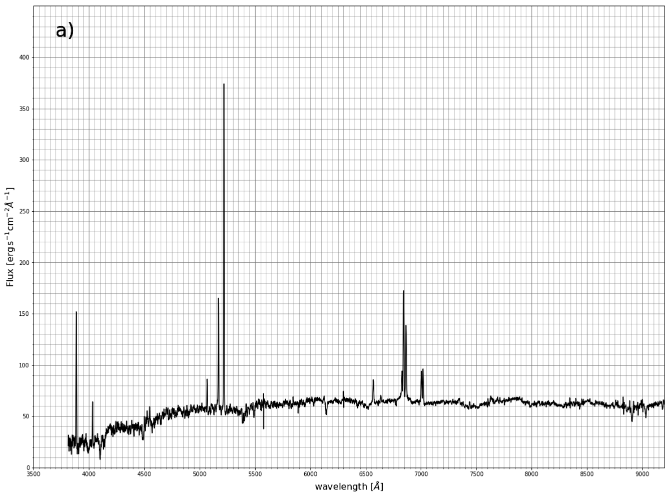

a)
b)
c)
d)
Relative intensity
Wavelength (A)
6530
6540
6550
6560
6570
6580
6590
LJR Pic du Midi + eShel spectrograph
July 19, 2009
J.P. Rozelot, V. Desnoux, C. Buil

b) Szintén külön oldalakon három extragalaktikus forrás színképének egy részletét láthatod. A színképek az SDSS (Sloan Digital Sky Survey) égboltfelmérés keretében készültek. A legnagyobb intenzitású emissziós vonal a hidrogén Hα jelű Balmer-vonala. A legnagyobb intenzitású csúcs leolvasott hullámhossza alapján adj becslést az objektumok vöröseltolódására és Mpc egységben a tőlünk mért távolságukra! Azt is jelezd, hogyan számoltál! (12 p)

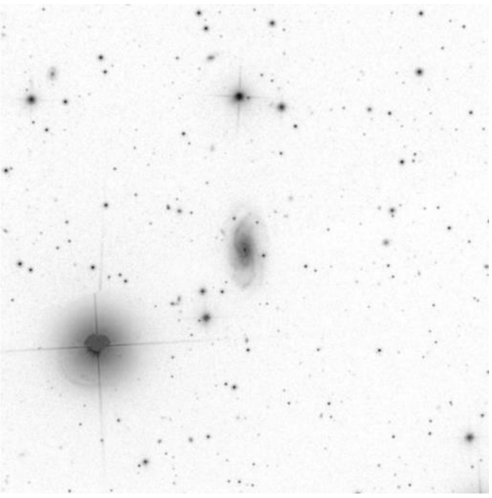
A Hα vonal laboratóriumi hullámhossza 6562,8 Å.

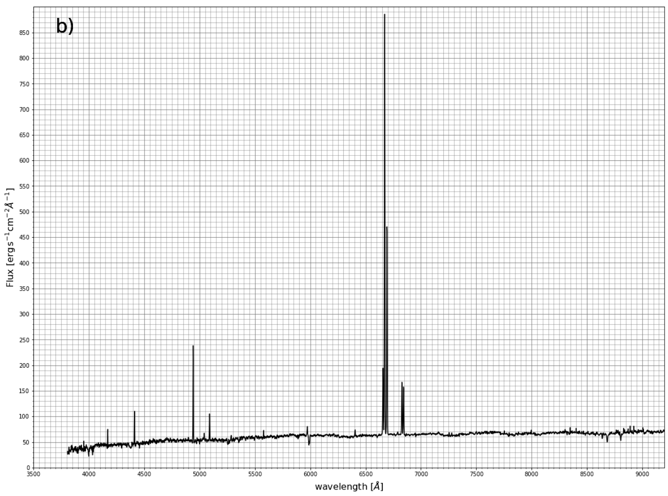
SDSS J150126.33+020410.8



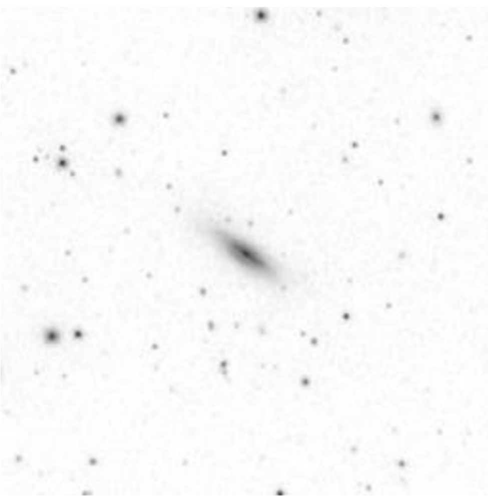


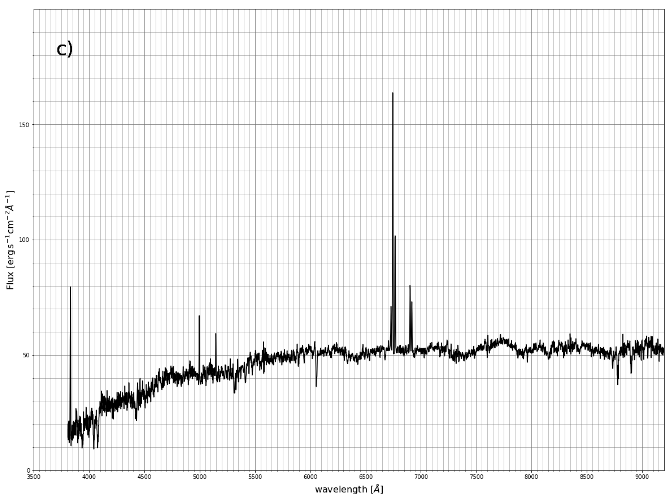
SDSS J160758.35+104646.5

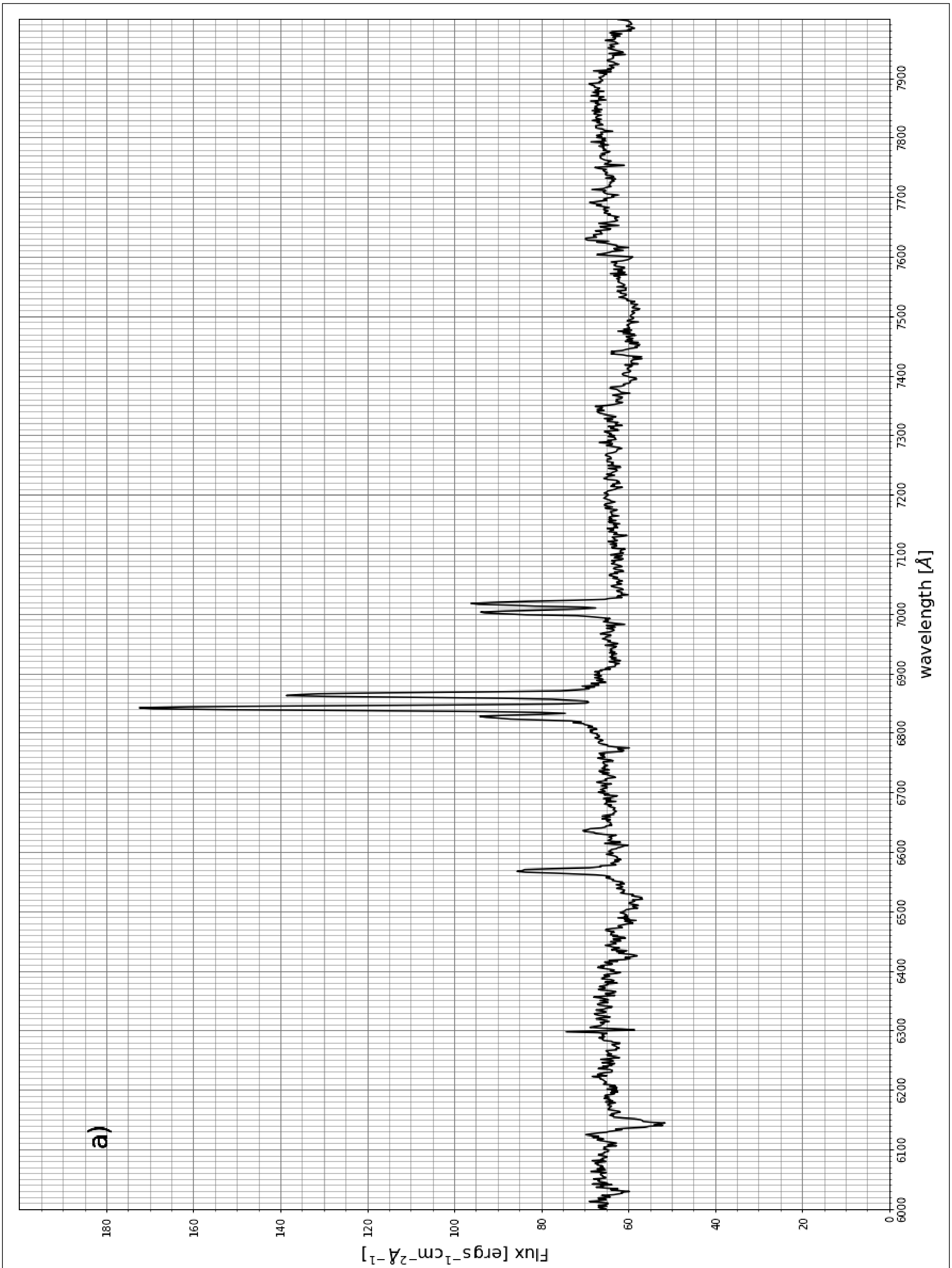


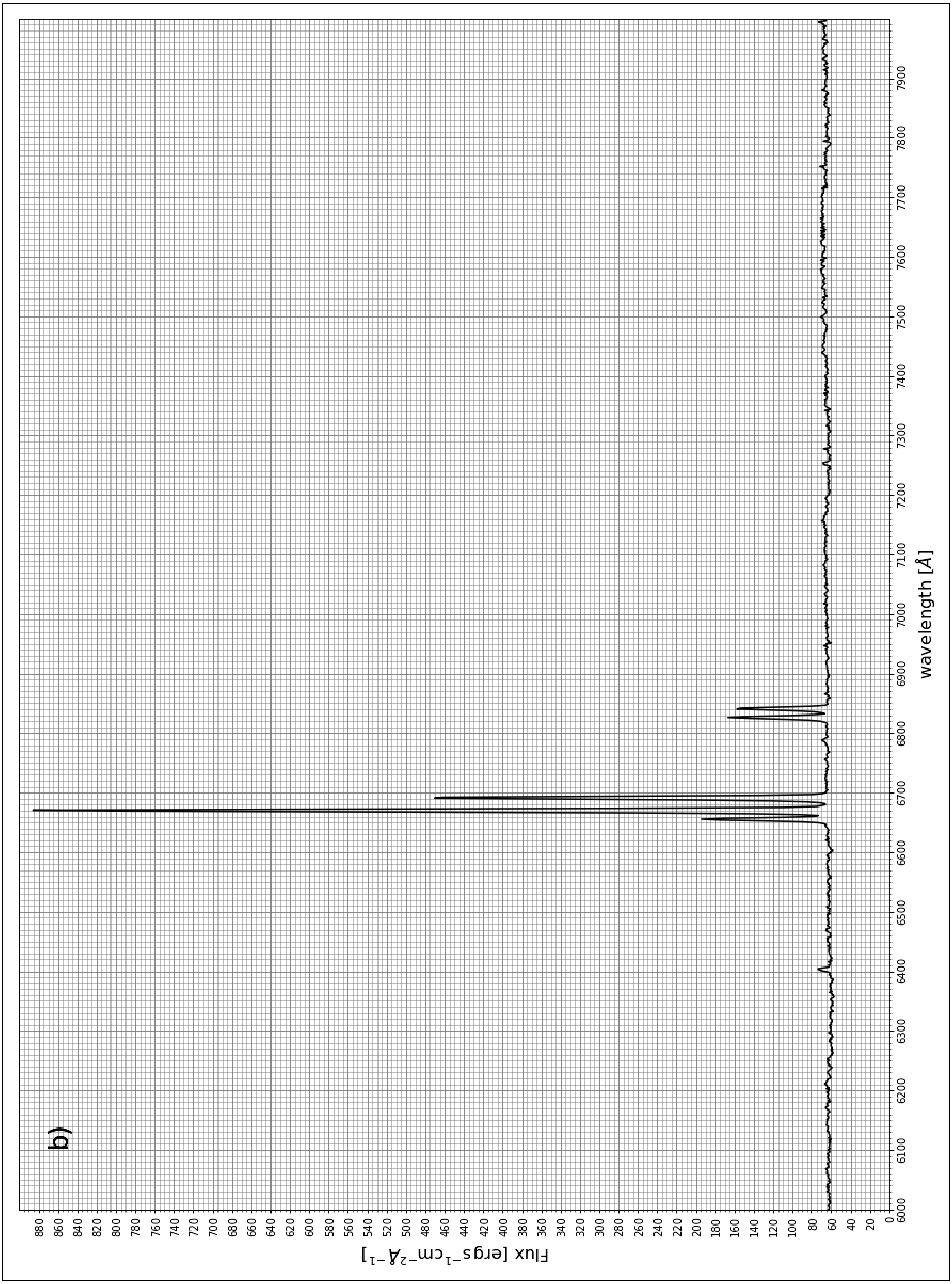


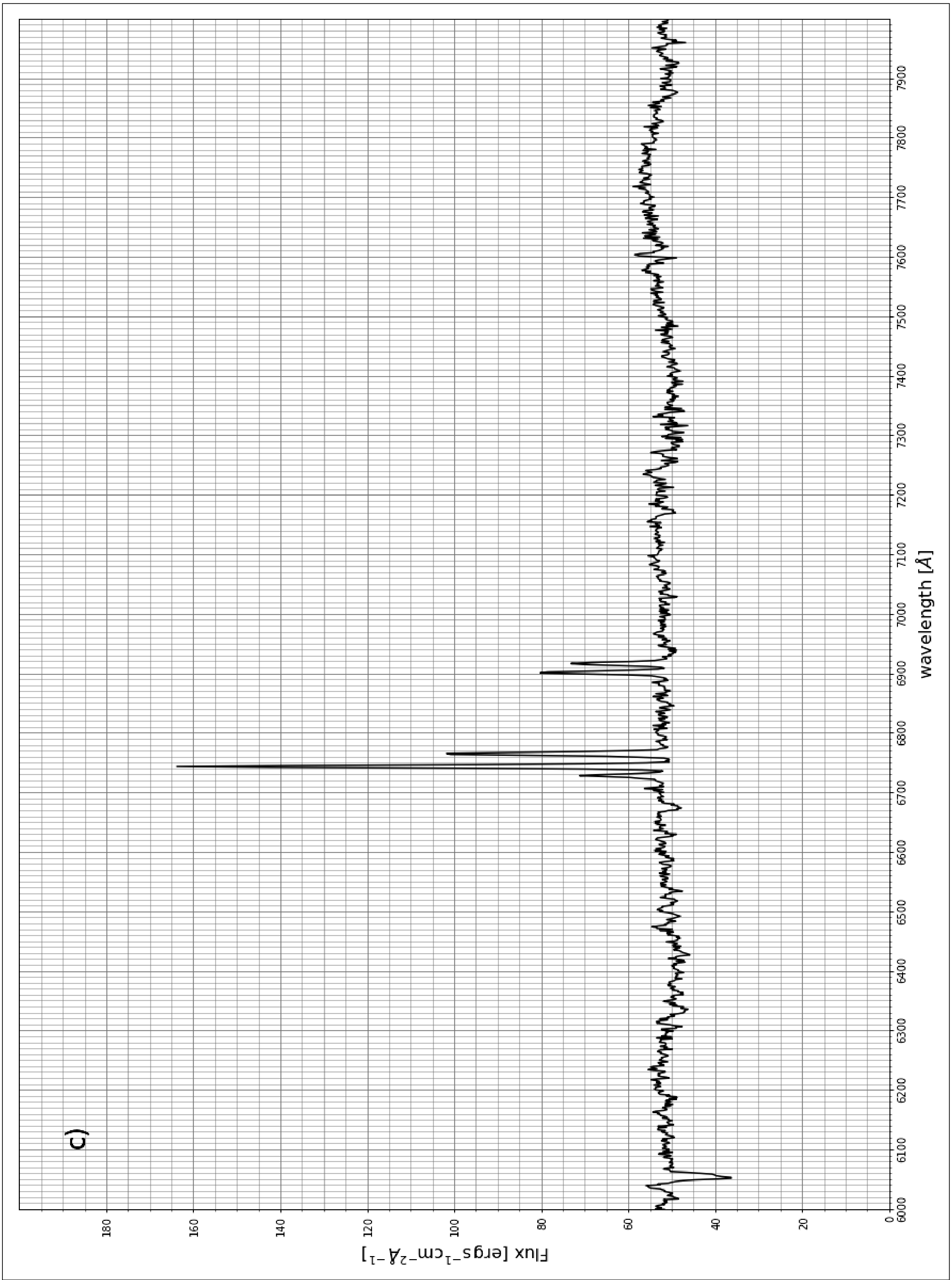
SDSS J215342.70+000823.5






a)
wavelength [Å]
Flux [ergs⁻¹cm⁻²Å⁻¹]
6000
6100
6200
6300
6400
6500
6600
6700
6800
6900
7000
7100
7200
7300
7400
7500
7600
7700
7800
7900
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180


b)
wavelength [Å]
Flux [ergs^{-1}cm^{-2}Å^{-1}]
6000 6100 6200 6300 6400 6500 6600 6700 6800 6900 7000 7100 7200 7300 7400 7500 7600 7700 7800 7900
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500 520 540 560 580 600 620 640 660 680 700 720 740 760 780 800 820 840 860 880


c)
Flux [ergs^{-1}cm^{-2}Å^{-1}]
wavelength [Å]
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
6000
6100
6200
6300
6400
6500
6600
6700
6800
6900
7000
7100
7200
7300
7400
7500
7600
7700
7800
7900

2. Két nyílthalmaz távolságarányának meghatározása 80 p

A csillagászat minden bizonnyal legfontosabb diagramja a Hertzsprung–Russell-diagram (HRD), amely „alapváltozatában" a csillagok abszolút fényességét (azaz a 10 parszek távolságból mérhető látszó fényességüket) mutatja az effektív hőmérsékletük függvényében. A HRD-n jellegzetes csoportosulások figyelhetők meg, ezek közül talán legfontosabb az ún. fősorozat. A diagram egyes változataiban a vízszintes tengelyen nem a hőmérséklet, hanem valamely egyéb, de azzal kapcsolatba hozható mennyiség szerepel, ilyen például a $B-V$ színindex, azaz a csillagoknak a Johnson-féle B és V fotometriai sávokban mért B és V látszó fényességének különbsége. Közeli fősorozati csillagok esetében a jól mérhető parallaxisuk alapján a távolságuk, ezzel pedig az M_V abszolút fényességük is ismert, ezért ez ábrázolható a $B-V$ színindexük függvényében, és így megjeleníthetjük velük a fősorozatot.

Ha ezen a diagramon például egy jóval távolabbi nyílthalmaz szintén fősorozati csillagainak V látszó fényességét is feltüntetjük a $B-V$ színindex függvényében, akkor az így kirajzolódó fősorozat az előzőhöz képest függőlegesen elcsúsztatva jelenik meg, az elcsúszás mértéke pedig a nyílthalmaz távolságát fogja jellemezni, mivel a halmaz csillagainak távolsága ugyanakkorának tekinthető. Ezzel a módszerrel (fősorozat-illesztés, angolul main sequence fitting) becslés adható a nyílthalmaz távolságára. Ha a közeli csillagokat nem használjuk fel, viszont ismerjük két nyílthalmaz csillagainak B és V látszó fényességeit, akkor a módszerrel a halmazok távolságainak arányát határozhatjuk meg. A következőkben ez lesz a feladatod.

A különálló oldalon mellékelt két táblázat közül a bal oldaliban (1. táblázat) két nyílthalmaz (OC_1 és OC_2) válogatott csillagainak adatait találod, ám összekeverve, azaz egyelőre nem tudjuk, hogy melyik csillag melyik halmazhoz tartozik. A # fejlécű oszlopban a csillagok sorszáma áll Sxx alakban, ahol xx egy (kétjegyű) szám. A két nyílthalmaznak az itt felsoroltaknál sokkal több csillaga van, de a mintát jelentősen leszűkítettük, hogy könnyítsük a zsebszámológéppel és „kézzel" elvégzendő számításokat. A B és V fejlécű oszlopokban a csillagok B és V fotometriai sávokban mért látszó fényességei vannak feltüntetve, mégpedig egy tizedesjegy pontossággal.

A táblázat többi oszlopát, illetve a jobb oldalon található rövidebb táblázatot (2. táblázat) neked kell kitöltened a megoldás során. A táblázatban az értékeket egy tizedesjegyre add meg!
Bár a kiindulási értékek alapján matematikailag nincs értelme, a táblázatba írandókon kívül minden más kiszámolt értéket három tizedesjegyre adj meg, mégpedig azért, hogy a számolásaidat könnyebben ellenőrizhessük!

Feladataid a következők:

a) A $B-V$ fejlécű oszlop mezőit töltsd fel a megfelelő B és V fényességértékek $B-V$ különbségével, azaz határozd meg a csillagok $B-V$ színindexeit! (6 p)

b) Milliméterpapíron az összes csillagra ábrázold a $B-V$ függvényében a V értékeket! A vízszintes tengelyt $-0{,}2$ és 1,6 között skálázd úgy, hogy 1 cm 0,1 magnitúdónak feleljen meg, és minden második lépésnél tüntesd fel az értéket! A függőleges tengelyt 20 és 6 között skálázd úgy, hogy azon 1 magnitúdónak 1 cm feleljen meg, és itt is minden második lépésnél tüntesd fel az értéket! Mivel a nagyobb magnitúdóérték kisebb fényességet jelent, ügyelj arra, hogy a függőleges tengely skálázása „fordított" legyen, azaz legalul legyen a 20 és legfelül a 4! A tengelyek feliratai legyenek $B-V$ és V! (18 p)

c) Az ábra – esetleg a táblázatban szereplő értékek – alapján különítsd el a két halmaz csillagait! Az 1. táblázat OC_1 és OC_2 fejlécű oszlopaiban egy-egy $\times$ szimbólummal jelezd, hogy az adott csillag melyik halmazhoz tartozik. (6 p)

d) Az ábra alapján válassz ki minden olyan csillagpárt – a pár egyik tagja az egyik halmazból, másik tagja a másik halmazból legyen –, amelyek $B-V$ színindexe megegyezik! Ezen csillagok adatait írd be a 2. táblázat megfelelő oszlopaiba: az OC_1 és OC_2 fejlécű oszlopokba a csillagok Sxx jelöléseit, a V_1 és V_2 fejlécű oszlopokba a csillagok V fényességértékeit, a $V_2 - V_1$ fejlécű oszlopba pedig a fényességértékek $\Delta V = V_2 - V_1$ különbségét! A kiválasztott párokat 1-től kezdődő számozással az 1. táblázat PR_{12} oszlopában is jelöld meg! (Az első pár mindkét tagja kapja az „1"-et, a másodiké a „2"-t és így tovább.) (9 p)

e) Határozd meg a $V_2 - V_1$ fejlécű oszlopba írt értékek μ_1 átlagát, illetve a σ_1 szórásukat, és az értékeket írd be a táblázat alatt kijelölt helyekre is! (4 p)

Az átlagot és a szórást a

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ és } \Delta\mu_1 = \sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2}{n-1}}$$

formulák alapján számold, ahol n az adatpontok száma! μ_1 hibájának az így kiszámolt $\Delta\mu_1$ értéket tekintjük.

f) A Konstanstáblázat végén található formulák alkalmazásával határozd meg a fényesebb halmaz fősorozatára legjobban illeszkedő egyenes a_1 meredekségét és b_1 tengelymetszetét, illetve a hozzájuk tartozó σ_{a_1} és σ_{b_1} szórásokat. Utóbbiakat tekintjük a paraméterek Δa_1 és Δb_1 abszolút hibájának. Mindkét esetben add meg az S_x, S_y, S_{xx}, S_{xy}, Δ és χ^2 értékét is, hogy könnyebben tudjuk ellenőrizni a számolásaidat! (18 p)

g) Határozd meg a halványabb halmaz fősorozatára legjobban illeszkedő azon egyenes b_2 tengelymetszetét, amelynek a_2 meredeksége megegyezik a fényesebb halmaz fősorozatára illesztett egyenes a_1 meredekségével! A számításhoz használd fel az előző pontban kapott eredményeket, illetve számold ki és add meg a még szükséges segédmennyiségek értékét is! A meredekség hibája ugyanaz legyen, mint az előző esetben, azaz $\Delta a_2 = \sigma_{a_2} = \sigma_{a_1} = \Delta a_1$! (6 p)

h) Ábrázold az illesztett egyeneseket is! (2 p)

i) Határozd meg a két egyenes b_2 és b_1 tengelymetszeteinek $\mu_2 = b_2 - b_1$ különbségét, illetve annak $\Delta\mu_2$ hibáját is! (4 p)

Utóbbit becsüld a Gauss-féle kvadratikus hibaformulával, amelynek alakja ebben az esetben:

$$\Delta\mu_2 = \sqrt{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2}$$

j) Az előző feladatrészekben kétféle módon adtál becslést a két nyílthalmaz fősorozatainak „távolságára" a HRD-n (μ_1 és μ_2). Mivel a közel azonos $B - V$ színindexű csillagok hőmérséklete is nagyjából megegyezik, ezért a HRD fősorozatának jól meghatározott voltából következően azok abszolút fényessége is kb. ugyanakkora. A

$$\mu = m_2 - m_1 = m_2 - M - (m_1 - M)$$

formulát és a távolságmodulus csillagközi fényelnyelést nem tartalmazó definícióját felhasználva határozd meg a két nyílthalmaz tőlünk mért d_1 és d_2 távolságainak d_2/d_1 arányát és annak hibáját μ_1 és μ_2 esetére is! (7 p)

Segítség: A hiba becsléséhez használd a

$$\Delta(a^x) = a^x \ln a \, \Delta x$$

formulát!

1. táblázat

#	B	V	$B-V$	OC_1	OC_2	PR_{12}
S03	14,5	14,0				
S05	7,9	7,8				
S08	10,7	10,7				
S09	13,6	13,2				
S11	6,4	6,5				
S12	16,1	14,8				
S14	17,9	16,8				
S17	8,3	8,1				
S18	16,1	15,3				
S19	9,9	9,5				
S21	11,5	11,4				
S22	10,6	10,1				
S23	7,3	7,3				
S24	17,4	16,4				
S25	14,9	14,3				
S28	13,7	12,7				
S29	15,5	14,8				
S30	14,7	13,5				
S32	16,9	15,5				
S34	12,9	12,1				
S36	12,2	12,0				
S38	10,0	10,1				
S43	12,8	12,5				
S49	14,6	13,5				

2. táblázat

OC_1	V_1	OC_2	V_2	V_2-V_1

$\mu_{V_2-V_1} =$ ....

$\sigma_{V_2-V_1} =$ ....

Kód: ....

1. „Színképelemzés" Naprendszeren innen és túl $\boxed{\textbf{20 p}}$

a) A pozíciók és a színképek párosítása:

- Pos #1: b) tiszta fotoszférikus abszorpció (2 p)
- Pos #2: d) fotoszférikus abszorpció és enyhe kromoszférikus emisszió (2 p)
- Pos #3: a) kb. egyforma fotoszférikus abszorpció és kromoszférikus emisszió (2 p)
- Pos #4: c) tiszta kromoszférikus emisszió (2 p)

b) A forrás vöröseltolódása:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1, \qquad (1\,\mathrm{p})$$

ahol λ a Hα vonal mért, λ_0 pedig a laboratóriumi hullámhossza.

A forrás távolsága a Hubble–Lemaître-törvényből:

$$d = \frac{cz}{H_0}, \qquad (2\,\mathrm{p})$$

ahol c a fény vákuumbeli sebessége, H_0 pedig a Hubble-állandó.

A hullámhossz leolvasásánál az alábbi értékektől ± 5 Å eltérést megengedünk, zárójelben az ennek megfelelő elfogadható tartományok láthatók.

a) 1. színkép (a)
A Hα vonal leolvasott hullámhossza: $\lambda_1 = 6840\,\text{Å}$ $(6835\,\text{Å} < \lambda_1 < 6845\,\text{Å})$ (1 p)
A forrás vöröseltolódása: $\boxed{z_1 = 0{,}0422}$ $(0{,}0415 < z_1 < 0{,}0430)$ (1 p)
A forrás távolsága: $\boxed{d_1 = 181\,\mathrm{Mpc}}$ $(178\,\mathrm{Mpc} < d_1 < 184\,\mathrm{Mpc})$ (1 p)

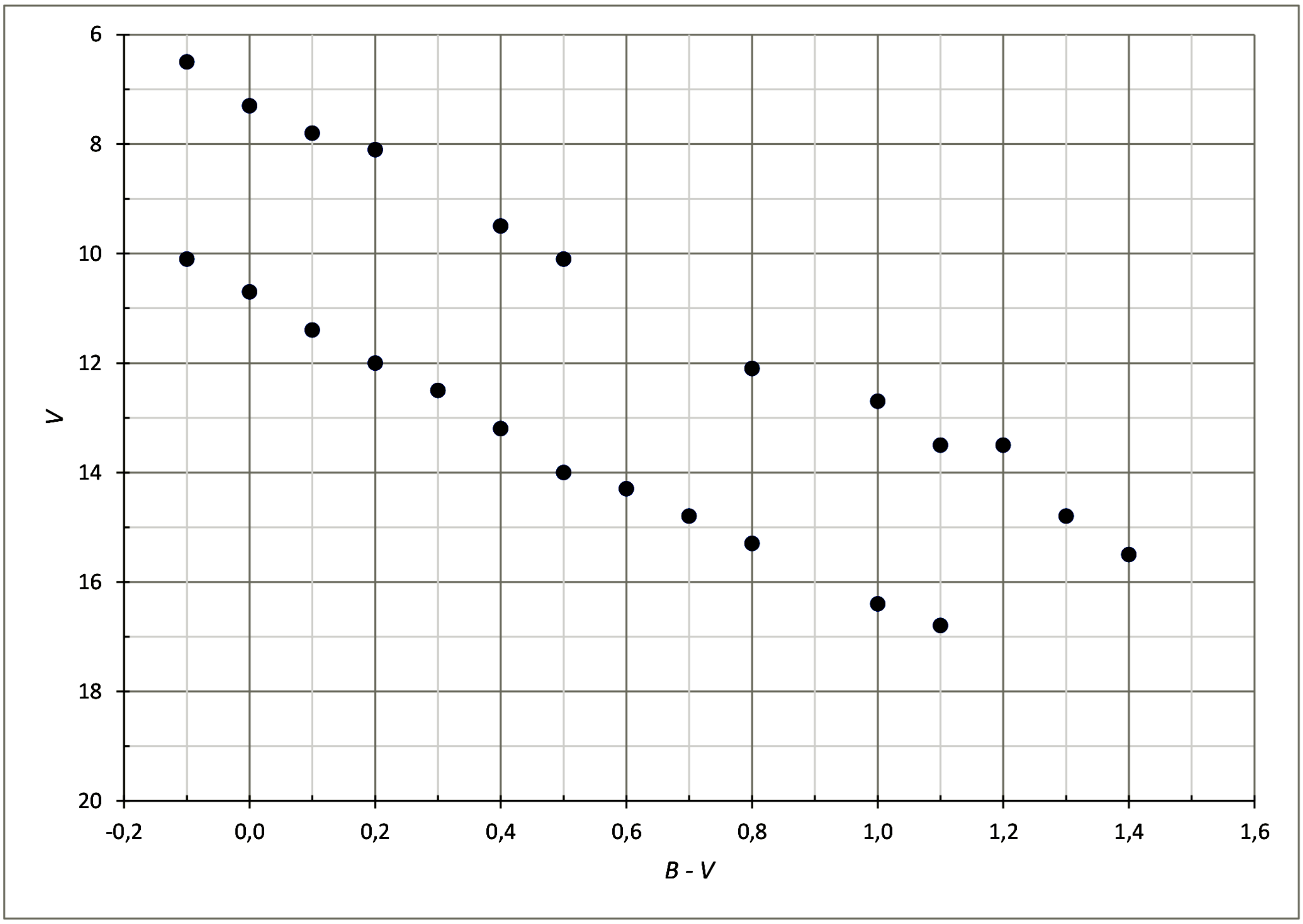
b) 2. színkép (b)
A Hα vonal leolvasott hullámhossza: $\lambda_2 = 6670\,\text{Å}$ $(6665\,\text{Å} < \lambda_2 < 6675\,\text{Å})$ (1 p)
A forrás vöröseltolódása: $\boxed{z_2 = 0{,}0163}$ $(0{,}0156 < z_2 < 0{,}0171)$ (1 p)
A forrás távolsága: $\boxed{d_2 = 70\,\mathrm{Mpc}}$ $(67\,\mathrm{Mpc} < d_2 < 73\,\mathrm{Mpc})$ (1 p)

c) 3. színkép (c)
A Hα vonal leolvasott hullámhossza: $\lambda_3 = 6745\,\text{Å}$ $(6740\,\text{Å} < \lambda_3 < 6750\,\text{Å})$ (1 p)
A forrás vöröseltolódása: $\boxed{z_3 = 0{,}0278}$ $(0{,}0270 < z_3 < 0{,}0285)$ (1 p)
A forrás távolsága: $\boxed{d_3 = 119\,\mathrm{Mpc}}$ $(116\,\mathrm{Mpc} < d_3 < 122\,\mathrm{Mpc})$ (1 p)

2. Két nyílthalmaz távolságarányának meghatározása — 80 p

a) Helyes értékenként 0,25 pont adható, így ezen feladatrész maximális pontszáma: (6 p)

b) Az alábbi, Excelben készülthöz hasonló ábrát várunk milliméterpapíron.



Adatpontok ábrázolása, helyes adatpontokként 0,5 pont: (12 p)

Vízszintes tengely előírás szerinti skálázása és felirata 2 + 1 pont: (3 p)

Függőleges tengely előírás szerinti skálázása és felirata 2 + 1 pont: (3 p)

c) Lásd a kitöltött 1. táblázatot! Helyes ábrázolás esetén jól látható, hogy a pontok 12–12 eloszlásban két egyenes körül csoportosulnak, ezek a két nyílthalmaz fősorozatai, illetve azok részei.

Helyes besorolásokként 0,25 pont: (6 p)

d) A javítóknak segítségként az utolsó oldalon látható `gnuplot`-tal készített „összefoglaló” ábrán felfelé mutató nyilak jelzik a párokat, összesen kilencet, illetve ugyanezen ábrán az adatpontok címkézése is a javítóknak szóló segítség.

Helyesen megállapított páronként 0,5 pont, a $V_2 - V_1$ különbség kiszámításáért is páronként 0,5 pont: (9 p)

e) Az átlag és a szórás a következő:

$\boxed{\mu_1 = 3{,}589}$ (2 p)

$\boxed{\Delta\mu_1 = \sigma_1 = 0{,}247}$ (2 p)

f) A fényesebb halmaz fősorozatára illeszkedő egyenes meredekségének és tengelymetszetének meghatározásához használt segédváltozók értékei:

$S = n = 12$

$\boxed{S_x = 7{,}900}$ (1 p)

$\boxed{S_y = 131{,}400}$ (1 p)

$\boxed{S_{xx} = 8{,}410}$ (1 p)

$\boxed{S_{xy} = 104{,}970}$ (1 p)

$\boxed{\Delta = 38{,}510}$ (1 p)

$\boxed{\chi^2 = 0{,}666}$ (1 p)

Az illesztett egyenes meredeksége és annak hibája:

$\boxed{a_1 = 5{,}754}$ (3 p)

$\boxed{\sigma_{a_1} = \Delta a_1 = 0{,}144}$ (3 p)

Az illesztett egyenes tengelymetszete és annak hibája:

$\boxed{b_1 = 7{,}162}$ (3 p)

$\boxed{\sigma_{b_1} = \Delta b_1 = 0{,}121}$ (3 p)

g) Az egyenes tengelymetszete:

$$b_2 = \frac{S_y - a_2 S_x}{S} = \frac{S_y - a_1 S_x}{S}$$ (1 p)

Itt S_x, S_y és S_{xx} értékét természetesen a halványabb halmaz adataiból kell számolni.

$\boxed{S_x = 5{,}600}$ (1 p)

$\boxed{S_y = 161{,}500}$ (1 p)

$\boxed{S_{xx} = 4{,}260}$ (1 p)

Az illesztett egyenes tengelymetszete és annak hibája:

$\boxed{b_2 = 10{,}773}$ (1 p)

$\boxed{\sigma_{b_2} = \Delta b_2 = 0{,}086}$ (1 p)

h) Lásd az Excelben készült ábrát a következő oldalon vagy a `gnuplot`-tal előállított ábrát az utolsó oldalon! (2 p)

i) A két illesztett egyenes tengelymetszetének különbsége és annak a Gauss-féle kvadratikus hibaformulával becsült hibája:

$\boxed{\mu_2 = b_2 - b_1 = 3{,}611}$ (2 p)

$\boxed{\Delta\mu_2 = 0{,}148}$ (2 p)

j) A két nyílthalmaz távolságainak aránya:

$$\frac{d_2}{d_1} = 10^{\mu/5} \qquad (1\,\text{p})$$

A hibáját a megadott segítség alapján a következő módon becsülhetjük:

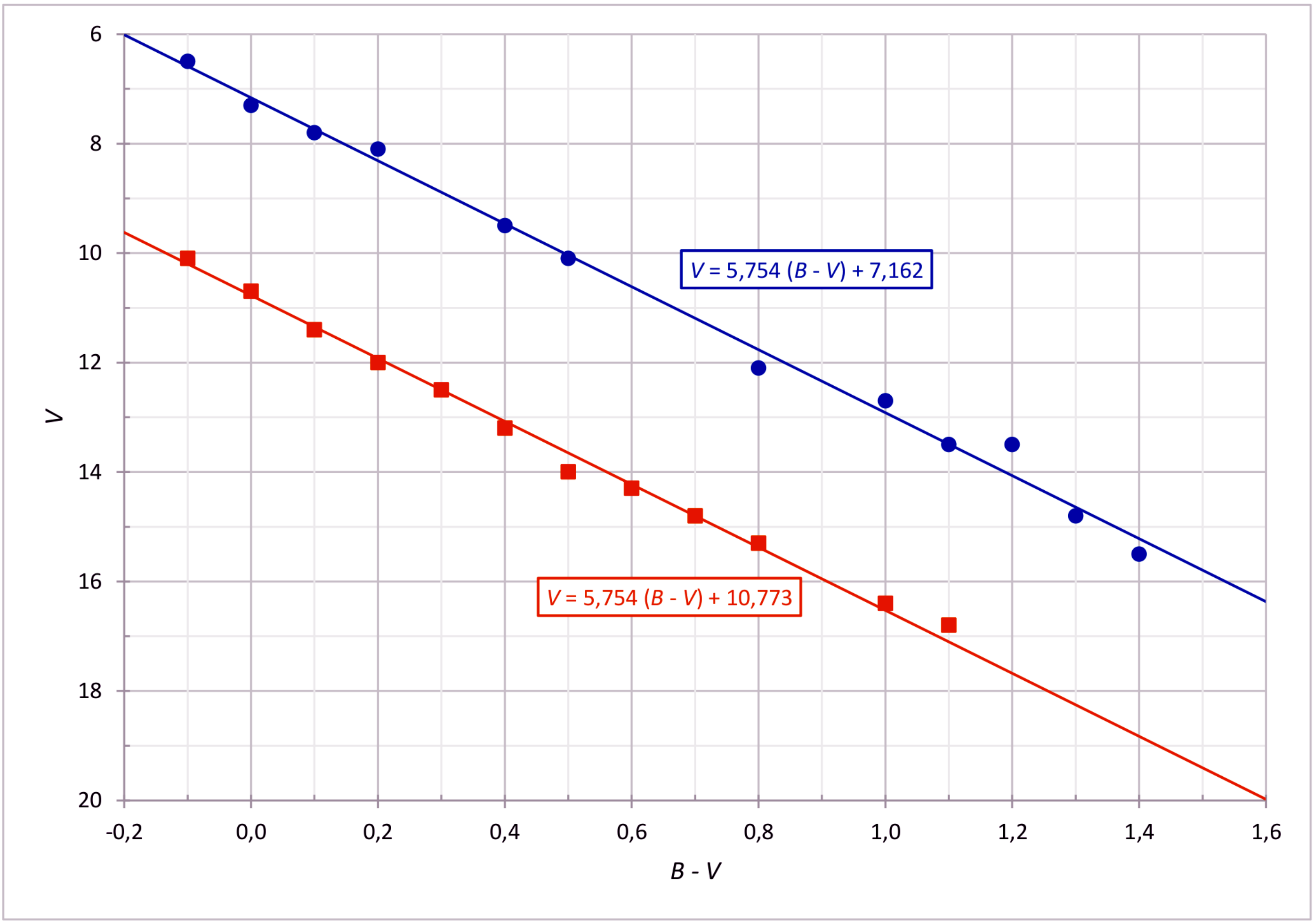
$$\Delta\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = \frac{\Delta\mu}{5}\,\frac{d_2}{d_1}\,\ln 10 \qquad (2\,\text{p})$$

μ_1 esetén:

$$\boxed{\left.\frac{d_2}{d_1}\right|_{\mu_1} = 5{,}221 \pm 0{,}594} \qquad (2\,\text{p})$$

μ_2 esetén:

$$\boxed{\left.\frac{d_2}{d_1}\right|_{\mu_2} = 5{,}275 \pm 0{,}359} \qquad (2\,\text{p})$$



A végső pontszámot a legközelebbi egész értékre felfelé kerekítve alakítsuk ki!

1. táblázat

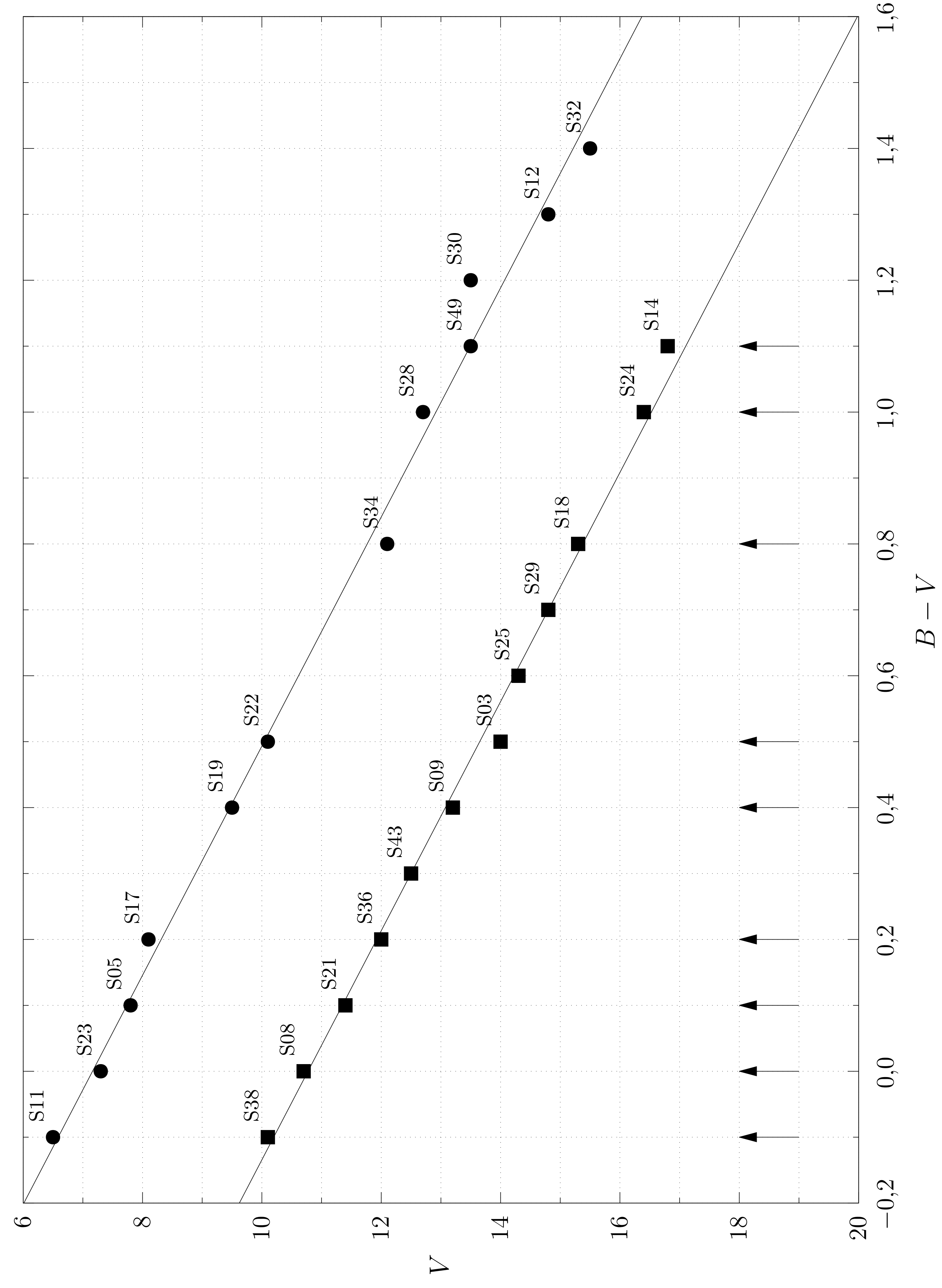
#	B	V	$B-V$	OC_1	OC_2	PR_{12}
S03	14,5	14,0	0,5		×	6
S05	7,9	7,8	0,1	×		3
S08	10,7	10,7	0,0		×	2
S09	13,6	13,2	0,4		×	5
S11	6,4	6,5	−0,1	×		1
S12	16,1	14,8	1,3	×		
S14	17,9	16,8	1,1		×	9
S17	8,3	8,1	0,2	×		4
S18	16,1	15,3	0,8		×	7
S19	9,9	9,5	0,4	×		5
S21	11,5	11,4	0,1		×	3
S22	10,6	10,1	0,5	×		6
S23	7,3	7,3	0,0	×		2
S24	17,4	16,4	1,0		×	8
S25	14,9	14,3	0,6		×	
S28	13,7	12,7	1,0	×		8
S29	15,5	14,8	0,7		×	
S30	14,7	13,5	1,2	×		
S32	16,9	15,5	1,4	×		
S34	12,9	12,1	0,8	×		7
S36	12,2	12,0	0,2		×	4
S38	10,0	10,1	−0,1		×	1
S43	12,8	12,5	0,3		×	
S49	14,6	13,5	1,1	×		9

2. táblázat

OC_1	V_1	OC_2	V_2	V_2-V_1
S11	6,5	S38	10,1	3,6
S23	7,3	S08	10,7	3,4
S05	7,8	S21	11,4	3,6
S17	8,1	S36	12,0	3,9
S19	9,5	S09	13,2	3,7
S22	10,1	S03	14,0	3,9
S34	12,1	S18	15,3	3,2
S28	12,7	S24	16,4	3,7
S49	13,5	S14	16,8	3,3

$\boxed{\mu_{V_2-V_1} = 3{,}589}$

$\boxed{\sigma_{V_2-V_1} = 0{,}247}$


V
B − V
6
8
10
12
14
16
18
20
−0,2
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
S11
S23
S05
S17
S19
S22
S34
S28
S49
S30
S12
S32
S38
S08
S21
S36
S43
S09
S03
S25
S29
S18
S24
S14