



Athletica Galactica

Kárpát-medencei Középiskolai
Csillagászati és Asztrofizikai Verseny

2025/2026

DÖNTŐ – DA

2026. MÁRCIUS 20–22.

JÁSZBERÉNY

VERSENYZŐ
KÓDJA / ÉVFOLYAMA

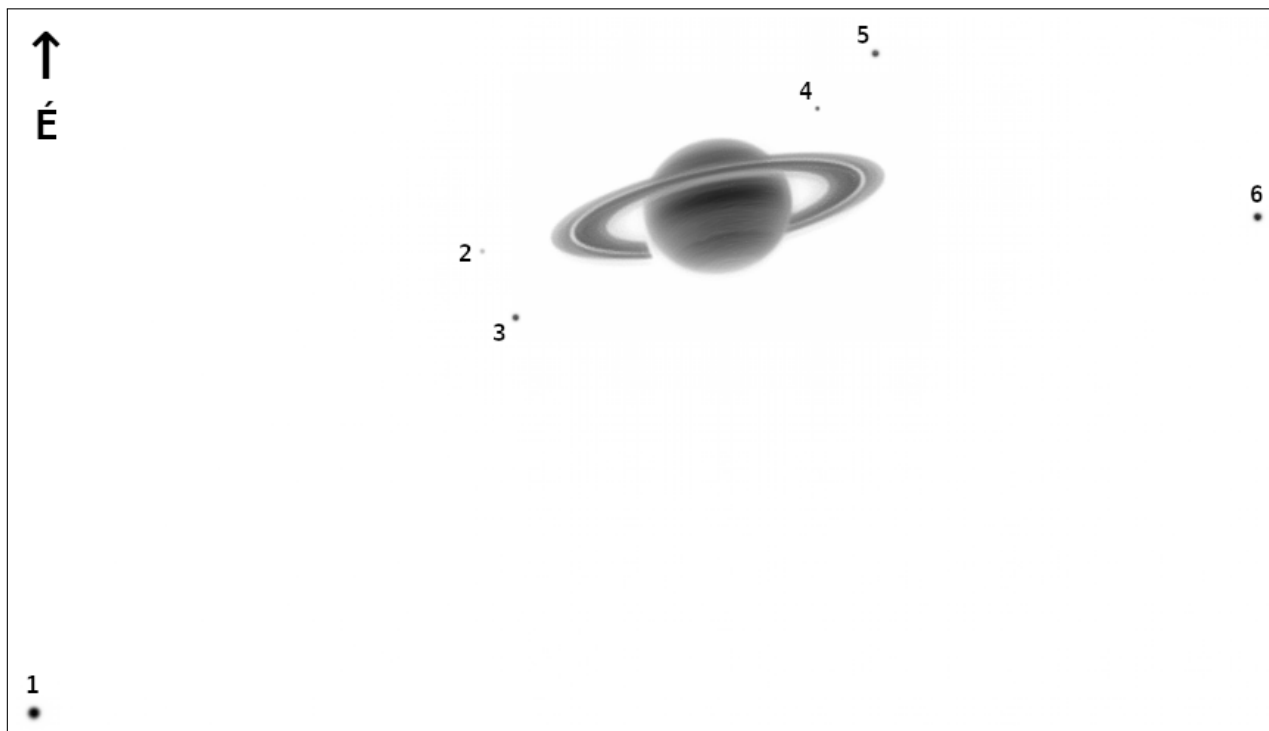
..... /

ELÉRT PONTSZÁM: / 100

1. A Szaturnusz és hat holdja

30 p

Az alábbi kép eredetijét Rafael Defavari brazil asztrofotós készítette 2012. március 9-én a Szaturnuszról és a bolygó hat (nagy) holdjáról. A felvétel a NASA APOD oldalán a nap képe volt 2012. április 14-én (<https://apod.nasa.gov/apod/ap120414.html>). A képet nyomtatási okokból pozitívból negatívba fordítottuk. Nagyobb változatát megtalálod a következő oldalon.



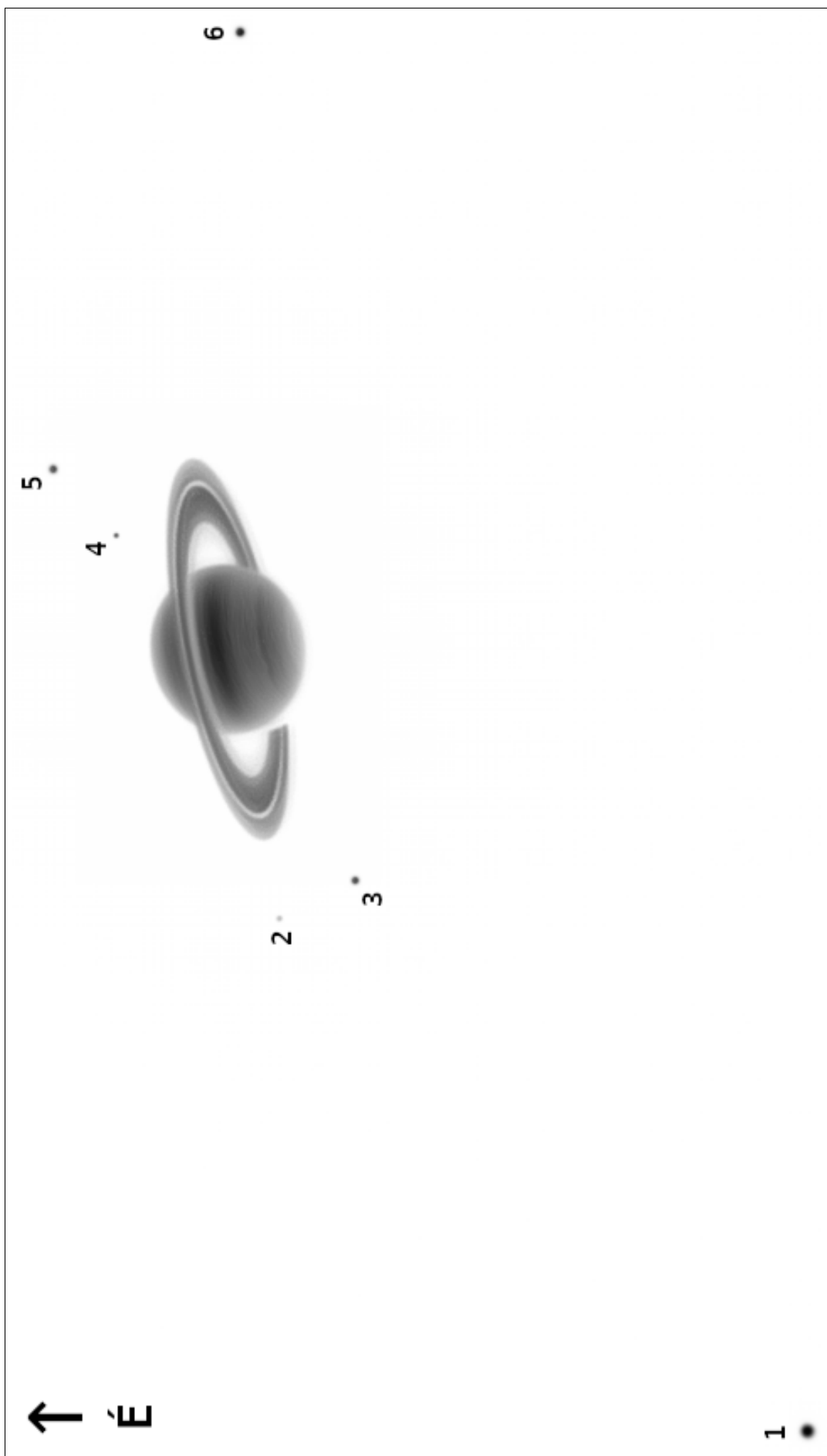
Az alábbi táblázat a Szaturnusz legnagyobb holdjainak adatait listázza. Tegyük fel, hogy a holdak a kör alakú gyűrűk síkjában körpályán keringenek a bolygó körül, amelyet tekintünk gömb alakúnak.

hold neve	tömeg [kg]	sugár [km]	pályasugár [km]	periódus [nap]
Mimas	$3,8 \cdot 10^{19}$	198,2	185 539	0,94
Enceladus	$1,1 \cdot 10^{20}$	252,1	238 037	1,37
Tethys	$6,2 \cdot 10^{20}$	531,1	294 619	1,89
Dione	$1,1 \cdot 10^{21}$	561,4	377 396	2,74
Rhea	$2,3 \cdot 10^{21}$	763,5	527 040	4,52
Titan	$1,3 \cdot 10^{23}$	2574,7	1 221 870	15,95
Iapetus	$1,8 \cdot 10^{21}$	734,4	3 560 820	79,32

- Találj ki módszert arra, hogy a kép nagyobb méretű változatán vonalzóval végzett egyszerű mérések és a táblázat adatai alapján hogyan tudnád azonosítani a sorszámozott holdakat! (10 p)
- A mérési módszer és a megadott adatok alapján származtatott számolási eredményeket foglald össze táblázatban, amely a sorszámok mellett tartalmazza a holdak nevét is! (18 p)
- Melyik hold volt legközelebb a Földhöz a felvétel készítésekor? (2 p)

Ha szükséged van további adatokra is, azokat a Konstanstáblázatból vedd! A megoldás során ne feltételezd, hogy a holdakra azok legnagyobb elongációjakor látsz rá! A feladatban hibabecslést nem kell végezned.

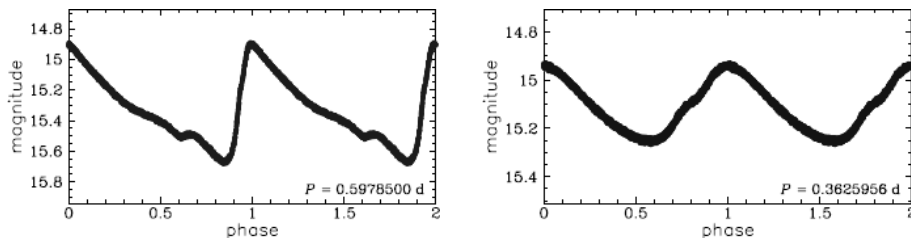
KÓD:



2. RR Lyrae csillagok az M3 gömbhalmazban

70 p

Az RR Lyrae csillagok idős, kis tömegű, radiálisan pulzáló változócsillagok (bár újabban gyengén gerjesztett nem radiális módusú pulzációt is felfedeztek ilyen csillagoknál). Pulzációs periódusuk hossza 0,2 és 1 nap közötti, és nagy számban fordulnak elő gömbhalmazokban. A pulzáció módját tekintve alcsoportokba sorolhatók: alpmódusban pulzálók (RRab), első felhangban pulzálók (RRc), valamint a két módusban pulzálók (RRd). Az RRab csillagok többségének periódusa 0,45 napnál hosszabb. Aszimmetrikus fénygörbe jellemző rájuk, gyors emelkedéssel a legnagyobb fényességig, amelyet lassú halványulás követ a fényességminimumig. Az RRc csillagok közül csak kevésnek a periódusa haladja meg a 0,5 napot, a fénygörbéjük is sokkal szimmetrikusabb, néhány esetben közel szinuszos. Az alábbi ábra egy-egy példát mutat az RRab és RRc fénygörbékre.



A paraméterek közötti összefüggések közül legismertebb a periódus-fényesség reláció, de van kapcsolat a pulzáció P periódusa és az R közepes sugár között is (P -t napban megadva):

$$\lg(R/R_{\odot}) = a \lg P + b$$

A táblázat az M3 gömbhalmaz néhány alpmódusban és első felhangban pulzáló RR Lyrae csillagának pulzációs periódusát és közepes sugarát listázza.

- Mindegyik változóra számítsd ki az $\lg P$ és az $\lg(R/R_{\odot})$ értékeket, a P esetében hat, az R esetében három tizedesjegyre! Az eredményeket a táblázat feladat végén mellékelt változatának megfelelő oszlopába írd. (20 p)
- Milliméterpapíron ábrázold az $\lg(R/R_{\odot})$ értékeket az $\lg P$ értékek függvényében, mindkét típus esetében ugyanazon az ábrán! Használj eltérő szimbólumokat az adatsorok jelöléséhez! A tengelyeket az értékeknek megfelelően skálázd, a felirataik pedig „ $\lg P$ [nap]” és „ $\lg(R/R_{\odot})$ ” legyenek. (24 p)
- A legkisebb négyzetek módszerével illessz egyenest mindkét típus adatpontjaira! Add meg az $a_{1,2}$ meredekségeket és a $b_{1,2}$ tengelymetszeteket, illetve azok $\sigma_{a_{1,2}}$ és $\sigma_{b_{1,2}}$ hibáit (1: RRab, 2: RRc) három tizedesjegyre! A számításaid ellenőrzésének megkönnyítése érdekében mindkét esetben a megfelelő indexszel (1 vagy 2) ellátva add meg az S , S_x , S_y , S_{xx} , S_{xy} és Δ segédparaméterek értékeit is három tizedesjegyre! (20 p)
- Az illesztett egyeneseket ábrázold a grafikonodon is! Jelezd egyértelműen, melyik egyenes melyik típushoz tartozik. (6 p)

RRab			
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}
1	V009	0,541 549	5,33
2	V015	0,530 088	5,34
3	V018	0,516 455	5,06
4	V019	0,631 980	5,74
5	V021	0,515 766	5,10
6	V026	0,597 751	5,74
7	V027	0,579 063	5,32
8	V036	0,545 596	5,26
9	V040	0,551 539	5,30
10	V046	0,613 388	5,71
11	V051	0,583 968	5,49
12	V055	0,529 826	5,32
13	V060	0,707 729	6,00
14	V064	0,605 461	5,70
15	V072	0,456 079	4,66
16	V081	0,529 120	5,26
17	V082	0,524 539	5,22
18	V083	0,501 270	5,03
19	V084	0,595 729	5,72
20	V089	0,548 481	5,39
21	V090	0,517 030	5,16
22	V093	0,602 297	5,76
23	V094	0,523 696	5,17
24	V096	0,499 406	5,21
25	V113	0,513 005	5,09
26	V115	0,513 346	5,23
27	V116	0,514 809	5,11
28	V120	0,640 145	5,89
29	V123	0,545 475	5,42
30	V124	0,752 440	6,34
31	V202	0,773 575	6,38

RRc			
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}
1	V037	0,326 636	4,53
2	V056	0,329 598	4,69
3	V086	0,292 656	4,27
4	V088	0,298 750	4,33
5	V097	0,334 930	4,54
6	V107	0,309 031	4,42

KÓD:

RRab					
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}	$\lg P$	$\lg(R/R_{\odot})$
1	V009	0,541 549	5,33		
2	V015	0,530 088	5,34		
3	V018	0,516 455	5,06		
4	V019	0,631 980	5,74		
5	V021	0,515 766	5,10		
6	V026	0,597 751	5,74		
7	V027	0,579 063	5,32		
8	V036	0,545 596	5,26		
9	V040	0,551 539	5,30		
10	V046	0,613 388	5,71		
11	V051	0,583 968	5,49		
12	V055	0,529 826	5,32		
13	V060	0,707 729	6,00		
14	V064	0,605 461	5,70		
15	V072	0,456 079	4,66		
16	V081	0,529 120	5,26		
17	V082	0,524 539	5,22		
18	V083	0,501 270	5,03		
19	V084	0,595 729	5,72		
20	V089	0,548 481	5,39		
21	V090	0,517 030	5,16		
22	V093	0,602 297	5,76		
23	V094	0,523 696	5,17		
24	V096	0,499 406	5,21		
25	V113	0,513 005	5,09		
26	V115	0,513 346	5,23		
27	V116	0,514 809	5,11		
28	V120	0,640 145	5,89		
29	V123	0,545 475	5,42		
30	V124	0,752 440	6,34		
31	V202	0,773 575	6,38		

RRc					
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}	$\lg P$	$\lg(R/R_{\odot})$
1	V037	0,326 636	4,53		
2	V056	0,329 598	4,69		
3	V086	0,292 656	4,27		
4	V088	0,298 750	4,33		
5	V097	0,334 930	4,54		
6	V107	0,309 031	4,42		

1. A Szaturnusz és hat holdja

30 p

A holdakat a Szaturnuszhoz viszonyított elhelyezkedésük alapján lehet azonosítani.

A gömb alakúnak tekintett Szaturnusz sugarát jelölje R_{S_z} (ennek értékét a Konstanstáblázatból vehetjük), a kör alakúnak tekintett gyűrűk közül a legkülső gyűrű külső szélének sugarát R_{gy} , a szintén kör alakúnak tekintett holdpályák sugarait pedig r_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

- a) A kép síkjára történő vetítés miatt a Szaturnusz kör alakú gyűrűit ellipsziseknek látjuk, és szintén ellipsziseknek látnánk a holdak kör alakúnak tekintett pályáit, ha ábrázolnánk azokat. A gyűrűk és a holdpályák vetületi ellipsziseinek nagytengelyei ugyanabban az irányban állnak, és az összes ellipszis excentricitása is ugyanakkora. A bolygót magát gömb alakúnak tekinthetjük, ezért annak vetülete a képsíkra egy körlap. (Valójában a bolygó erősen lapult, és ez a vetületben is látszik, de számunkra az egyenlítői átmérője lesz fontos, ezért a feladat szövegének megfelelően poláris lapultságtól eltekinthetünk.) Az adott feltételek mellett a vetítés aránytartó. (2 p)

(Ha a fenti megállapítások nagyjából szerepelnek a megoldásban, akkor jár a teljes pontszám. Ha hiányosan, akkor csak a fele.)

Az eljárás tehát a következő lehet (a magyarázó ábrát lásd a következő oldalon):

- Határozzuk meg a bolygó vetületi képének, a körlapnak a középpontját (C). (1 p)
Ez például két megfelelő húr felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként adódik.
- Ezt a pontot kössük össze a holdak képeinek középpontjaival ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). (1 p)
- Az összekötő szakaszok metszik a gyűrűket. Jelöljük meg az összekötő szakaszok és a legkülső gyűrű külső szélét reprezentáló vetületi ellipszis metszéspontjait. (1 p)
Jelölje ezeket a metszéspontokat M_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).
A 4-es és 5-ös hold esetében a vetületen ezek a metszéspontok nem választhatók szét, azaz $M_4 \equiv M_5$.
- Mérjük le vonalzóval a bolygó C középpontja és a holdak középpontjai közti C_i , illetve a CM_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) vetületi távolságokat. (1 p)
- A C_i és a CM_i távolságok arányai megegyeznek az r_i pályasugarak és az R_{gy} gyűrűátmérő arányaival:

$$\frac{C_i}{CM_i} = \frac{r_i}{R_{gy}} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (1 p)$$

- Az R_{gy} gyűrűsugár és az R_{S_z} bolygósugár arányát a gyűrű nagytengelyének vetülete mentén végzett mérések eredményének arányaként kaphatjuk meg. A nagytengely iránya jó közelítéssel egybeesik az M_2C egyenessel.

Tehát az M_2C egyenes mentén mérjük meg a bolygó vetületi képének átmérőjét, illetve a gyűrű vetületének nagytengelyét, és vegyük ezek arányát. (1 p)

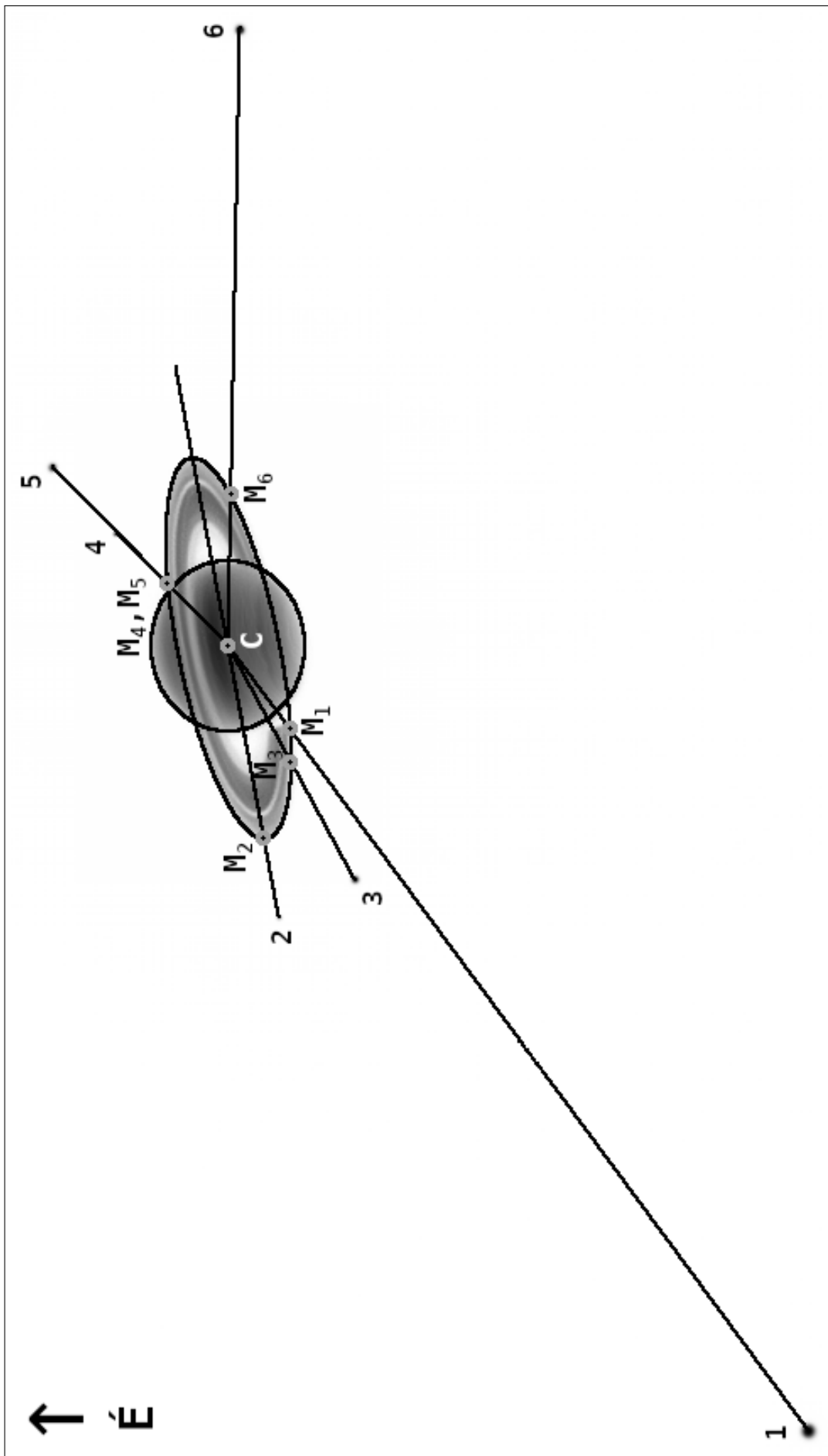
A mérés eredménye:

$$\frac{R_{gy}}{R_{S_z}} \approx \frac{67 \text{ mm}}{29 \text{ mm}} = 2,3 \quad (1 p)$$

A két egyenletből:

$$r_i = 2,3 \frac{C_i}{CM_i} R_{S_z} \quad (1 p)$$

90°



b) Az eredmények táblázatos formában (a képen vonalzóval mért C_i és CM_i , illetve a számolt r_i értékeket egészre kerekítve adtuk meg):

i	C_i	CM_i	C_i/CM_i	r_i	hold neve	r_i^*/r_F	r_i^*	Δr_i
1	170 mm	18 mm	9,49	1 262 602 km	Titan	8,67	1 221 870 km	-3,3%
2	48 mm	34 mm	1,42	189 131 km	Mimas	1,32	185 539 km	-1,9%
3	46 mm	22 mm	2,07	275 290 km	Tethys	2,09	294 619 km	6,6%
4	28 mm	15 mm	1,85	246 074 km	Enceladus	1,69	238 037 km	-3,4%
5	44 mm	15 mm	2,93	389 284 km	Dione	2,68	377 396 km	-3,2%
6	107 mm	27 mm	4,04	537 013 km	Rhea	3,74	527 040 km	-1,9%

A táblázat pontozása:

- A mért C_i értékek megadása, értékenként 0,5 pont: (3 p)
- A mért CM_i értékek megadása, értékenként 0,5 pont: (3 p)
- Az r_i értékek kiszámítása, értékenként 1 pont: (6 p)
A C_i/CM_i értékek külön kiszámítása nem szükséges. Nyilván nem baj, ha megvan, de nem jár érte külön pont.
- A holdak neveinek helyes sorrendben történő megadása, holdanként 1 pont: (6 p)

A C_i és a CM_i értékek kis mértékben (~ 1 mm) eltérhetnek a táblázatban szereplőktől, a C_i/CM_i arányok azonban legfeljebb a második tizedesjegyben különbözhetnek a megadottaktól.

A diákoktól csak a táblázat első hat oszlopát várjuk. Az utolsó három oszlop tájékoztató jellegű, ezek a következők:

- Az r_i^*/r_F oszlopban referenciaként feltüntettük a tényleges r_i^* pályasugarak és a legkülső, F jelzésű gyűrű $r_F \approx 141\,000$ km sugarának arányait, ezekkel is összehasonlíthatók a C_i/CM_i értékek.
- Az r_i^* oszlopban a tényleges pályasugarak értékeit listáztuk újra a megadott táblázatból.
- A Δr_i oszlopban a pályasugarak r_i^* tényleges és a megoldásban meghatározott r_i értékeinek $\Delta r_i = (r_i^* - r_i)/r_i^*$ relatív hibáját is megadtuk százalékos formában.

Az r_i^* tényleges és a megoldásban meghatározott r_i értékekben vannak ugyan eltérések, de azok nem túlságosan nagyok – egyik esetben sem haladják meg a 10%-ot –, így ezek alapján a holdak egyértelműen beazonosíthatók.

c) A kép alapján megállapíthatjuk, hogy a gyűrűk síkjára a bolygó déli pólusa felől, azaz „alulról” látunk rá. (1 p)

Így a felvétel készítésekor hozzánk legközelebb az 5-ös számú hold, azaz a **Dione** volt. (1 p)

2. RR Lyrae csillagok az M3 gömbhalmazban

70 p

a) Lásd a mellékelt, kitöltött táblázatot!

(20 p)

Pontozás:

Helyes értékeként 1 pont.

Az elért összpontszámot a végén normáljuk a 0–20 intervallumba – minden szükséges esetben felfelé kerekítve –, így összesen legfeljebb 20 pont.

b) A megoldás végén látható **A** jelűhöz hasonló ábrát várunk milliméterpapíron.

Vízszintes tengely skálázása: (2 p)

Vízszintes tengely felirata: (1 p)

Függőleges tengely skálázása: (2 p)

Függőleges tengely felirata: (1 p)

Adatpontok helyes ábrázolása, pontonként 0,5 pont, összesen (kerekítve) legfeljebb: (18 p)

c) A illesztett egyenesek meredekségei, tengelymetszetei, azok hibái és a segédparaméterek értékei:

RRabRRc

$$a_1 = 0,555$$

(1 p)

$$a_2 = 0,565$$

(1 p)

$$\sigma_{a_1} = 0,026$$

(1 p)

$$\sigma_{a_2} = 0,121$$

(1 p)

$$b_1 = 0,872$$

(1 p)

$$b_2 = 0,933$$

(1 p)

$$\sigma_{b_1} = 0,007$$

(1 p)

$$\sigma_{b_2} = 0,061$$

(1 p)

$$S_1 = 31$$

(1 p)

$$S_2 = 6$$

(1 p)

$$S_{x_1} = -7,720$$

(1 p)

$$S_{x_2} = -3,011$$

(1 p)

$$S_{y_1} = 22,757$$

(1 p)

$$S_{y_2} = 3,897$$

(1 p)

$$S_{xx_1} = 2,005$$

(1 p)

$$S_{xx_2} = 1,514$$

(1 p)

$$S_{xy_1} = -5,621$$

(1 p)

$$S_{xy_2} = -1,954$$

(1 p)

$$\Delta_1 = 2,568$$

(1 p)

$$\Delta_2 = 0,018$$

(1 p)

Összefoglalva az illesztett egyenesek egyenletei (ezeket a versenyzőktől nem várjuk):

$$\lg(R/R_\odot) = (0,555 \pm 0,026) \lg P \pm (0,872 \pm 0,007)$$

$$\lg(R/R_\odot) = (0,565 \pm 0,121) \lg P \pm (0,933 \pm 0,061)$$

d) A megoldás végén látható **B** jelűhöz hasonló ábrát várunk milliméterpapíron.

Pontozás:

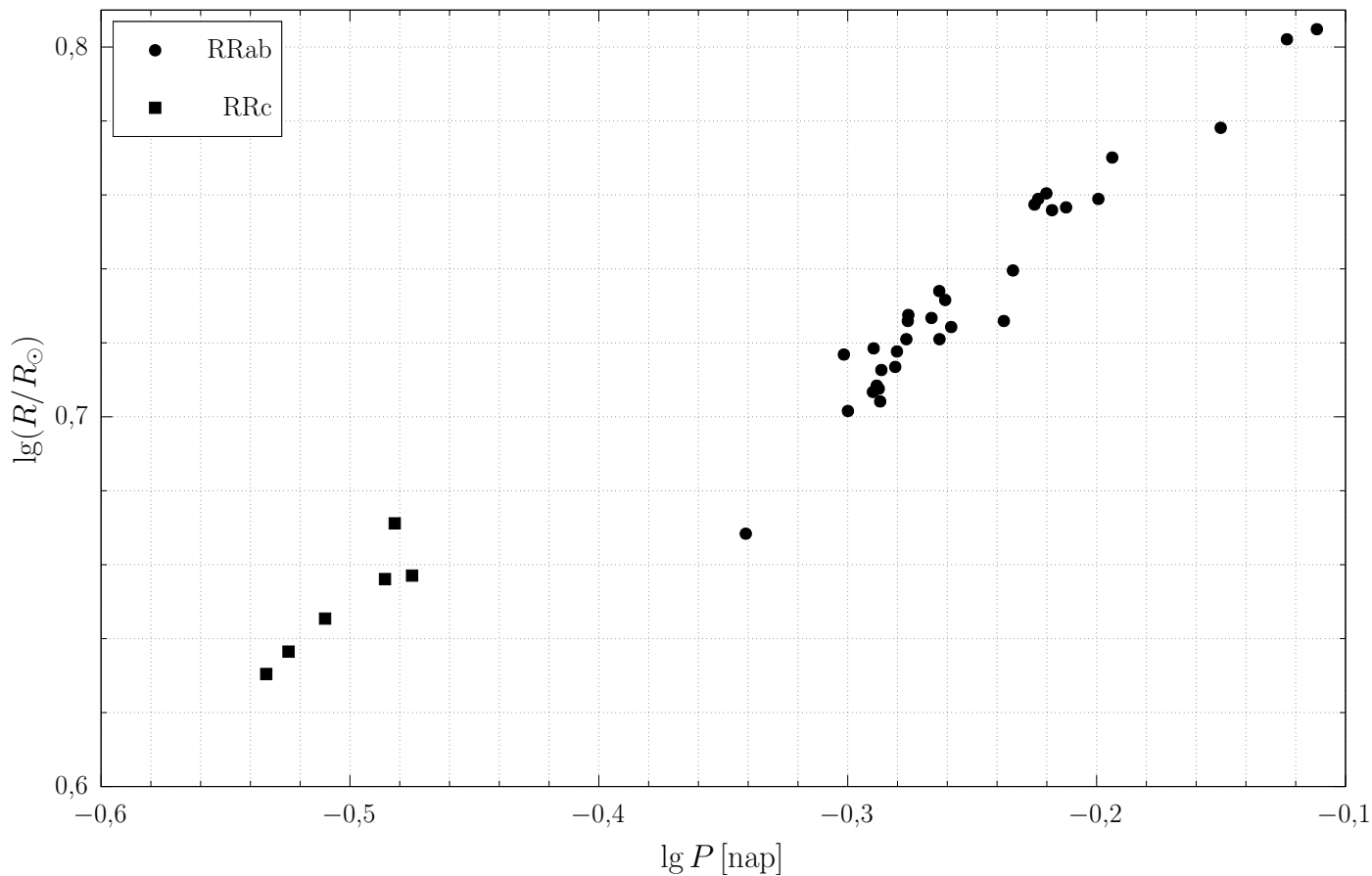
Az egyenesek helyes berajzolása, egyenesenként 2 pont, összesen legfeljebb: (4 p)

Az egyenesek egyértelmű megjelölése – akár az ábrán látható, akár más módon – egyenesenként 1 pont, összesen legfeljebb: (2 p)

RRab					
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}	$\lg P$	$\lg(R/R_{\odot})$
1	V009	0,541 549	5,33	-0,266 362	0,727
2	V015	0,530 088	5,34	-0,275 652	0,728
3	V018	0,516 455	5,06	-0,286 968	0,704
4	V019	0,631 980	5,74	-0,199 297	0,759
5	V021	0,515 766	5,10	-0,287 547	0,708
6	V026	0,597 751	5,74	-0,223 480	0,759
7	V027	0,579 063	5,32	-0,237 274	0,726
8	V036	0,545 596	5,26	-0,263 129	0,721
9	V040	0,551 539	5,30	-0,258 424	0,724
10	V046	0,613 388	5,71	-0,212 265	0,757
11	V051	0,583 968	5,49	-0,233 611	0,740
12	V055	0,529 826	5,32	-0,275 867	0,726
13	V060	0,707 729	6,00	-0,150 133	0,778
14	V064	0,605 461	5,70	-0,217 914	0,756
15	V072	0,456 079	4,66	-0,340 960	0,668
16	V081	0,529 120	5,26	-0,276 446	0,721
17	V082	0,524 539	5,22	-0,280 222	0,718
18	V083	0,501 270	5,03	-0,299 928	0,702
19	V084	0,595 729	5,72	-0,224 951	0,757
20	V089	0,548 481	5,39	-0,260 838	0,732
21	V090	0,517 030	5,16	-0,286 484	0,713
22	V093	0,602 297	5,76	-0,220 189	0,760
23	V094	0,523 696	5,17	-0,280 921	0,713
24	V096	0,499 406	5,21	-0,301 546	0,717
25	V113	0,513 005	5,09	-0,289 878	0,707
26	V115	0,513 346	5,23	-0,289 590	0,719
27	V116	0,514 809	5,11	-0,288 354	0,708
28	V120	0,640 145	5,89	-0,193 722	0,770
29	V123	0,545 475	5,42	-0,263 225	0,734
30	V124	0,752 440	6,34	-0,123 528	0,802
31	V202	0,773 575	6,38	-0,111 498	0,805

RRc					
no.	var	P [nap]	R/R_{\odot}	$\lg P$	$\lg(R/R_{\odot})$
1	V037	0,326 636	4,53	-0,485 936	0,656
2	V056	0,329 598	4,69	-0,482 015	0,671
3	V086	0,292 656	4,27	-0,533 643	0,630
4	V088	0,298 750	4,33	-0,524 692	0,636
5	V097	0,334 930	4,54	-0,475 046	0,657
6	V107	0,309 031	4,42	-0,509 998	0,645

A



B

