



Athletica Galactica

Kárpát-medencei Középiskolai
Csillagászati és Asztrofizikai Verseny

2025/2026

DÖNTŐ – TH

2026. MÁRCIUS 20–22.

JÁSZBERÉNY

VERSENYZŐ
KÓDJA / ÉVFOLYAMA

..... /

ELÉRT PONTSZÁM: / 100

1. Hangyalesőlárva éjszakája

10 p

Egy tölcsér alakú homokgödör alján a gödörhöz képest elhanyagolható méretű rovar, egy hangyaleső lárvája várakozik a zsákmányára. Az, hogy mit is csinál ez a ragadozó nappal, inkább az „Athletica Biologica” verseny témája lehetne, minket az érdekel, vajon mit figyelhet meg a hangyaleső csillagászat iránt érdeklődő lárvája az éjszaka során?

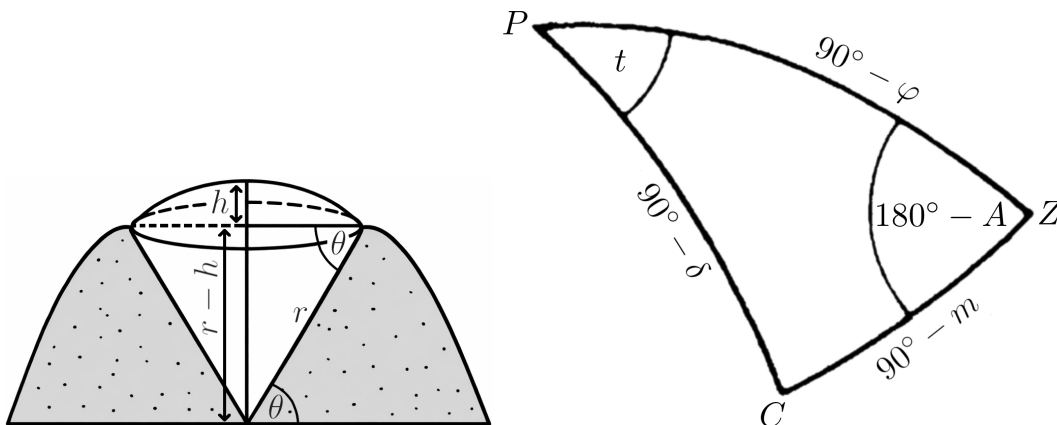
- a) A kúp alakú tölcsér alkotójának vízszintessel bezárt szöge $\theta = 34^\circ$. A tölcsér alján várakozó lárvá leshelyéről a **teljes** égbolt hány százalékát láthatja egy adott pillanatban? Az eredményt egésze kerekítve add meg! (3 p)

Segítség: Az r sugarú gömb h magasságú gömbsüvegeének felszíne $S = 2\pi rh$. Lásd a bal oldali ábrát, amely egyéb segítséget is ad a megoldáshoz.

- b) Jászberény közelében ($\varphi = 47,556^\circ$) egy hangyaleső lárvája a gödrének aljáról éjszaka azt látja, hogy egy csillag pontosan keleten kel fel, és pontosan nyugaton nyugszik le. Mekkora a csillag δ deklinációja? Az eredményt fokban add meg, két tizedesjegyre kerekítve! (4 p)

Segítség: A jobb oldali ábra segíthet a megoldásban.

- c) Milyen hosszú ideig figyelheti éjszaka ezt a csillagot a hangyaleső lárvája? A τ -val jelölt eredményt órában kifejezve add meg, két tizedesjegyre kerekítve! (3 p)



2. Ikek egymás melegében

15 p

Tekintsünk két teljesen azonos csillagot, amelyek sugara $R_\star = 86 R_\odot$, luminozitása pedig $L_\star = 2000 L_\odot$, ahol $R_\odot = 6,955 \cdot 10^5$ km és $L_\odot = 3,826 \cdot 10^{26}$ W. Tegyük fel, hogy a csillagok abszolút fekete testként sugároznak (a rájuk eső sugárzást teljes mértékben elnyelik, és egyidejűleg azonos mennyiségű sugárzást bocsátanak ki).

- a) Határozd meg a két csillag effektív hőmérsékletét, feltételezve, hogy azok nagyon messze vannak egymástól! Az eredményt kelvinben add meg, tízesre kerekítve! (4 p)
- b) Határozd meg, hogy mekkora ΔT értékkel nő a csillagok effektív hőmérséklete, ha azok „pillanatszerűen” $d = 1000 R_\odot$ távolságra megközelítik egymást! (11 p)

Feltehetjük, hogy mindkét csillag felülete mindenhol azonos hőmérsékletű, valamint azt, hogy a sugaruk és a „saját” luminozitásuk sem változik a közeledés után, és pillanatszerűen elérik a hőmérsékleti egyensúlyt is.

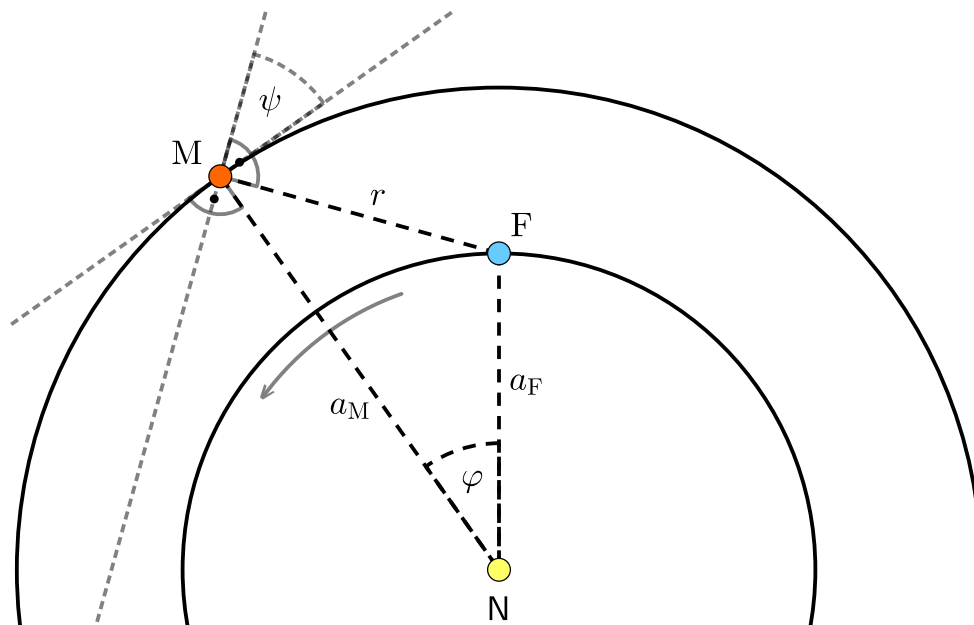
3. A Mars retrográd mozgása

20 p

A Mars retrográd mozgása az a jelenség, amikor a bolygó – Naprendszerünk többi külső bolygójához hasonlóan – a Nap körüli keringési irányához képest *látszólag* ellentétes irányban mozog bizonyos ideig.

Jelölje T_F és T_M a Föld és a Mars sziderikus keringési idejét, a_F és a_M pedig a bolygók – az egyszerűség kedvéért – kör alakúnak gondolt pályáinak sugarát. Vonatkoztatási rendszernek válasszuk azt a heliocentrikus rendszert, amely ugyanakkora $\omega_F = 2\pi/T_F$ szögsebességgel forog, mint amekkorával a Föld kering a Nap körül. Jelölje ezt a rendszert H_F . A geometriai helyzetet az alábbi ábra szemlélteti, amelyen N, F és M jelöli a Napot, a Földet és a Marsot, a_F és a_M a Föld és a Mars pályasugarát, r a két bolygó távolságát, φ az FNM háromszögben a Napnál lévő szöveget, ψ pedig a Mars pályájának a bolygónál húzott érintője és az M ponton átmenő, FM szakaszra merőleges egyenes által bezárt szöveget.

A Mars akkor látszik retrográd irányban mozogni, ha a földi megfigyelő látóirányára merőleges sebessége nulla lesz. A feladat annak meghatározása, hogy ez milyen bolygóhelyzeteknél állhat elő, és így mennyi ideig tarthat a vörös bolygó hátráló mozgása.



- Határozd meg a Mars keringésének H_F rendszerhez viszonyított ω'_M szögsebességét! ω'_M kifejezését $\omega_F = 2\pi/T_F$ és $\omega_M = 2\pi/T_M$ függvényében add meg! (2 p)
- Add meg a Föld és a Mars r távolságának kifejezését a_F , a_M és $\cos \varphi$ függvényében! (2 p)
- Határozd meg $\cos \psi$ kifejezését szintén a_F , a_M és $\cos \varphi$ függvényében! (4 p)
- Add meg a Mars pálya menti sebességének egy H_F rendszerbeli földi megfigyelőhöz viszonyított v_t érintőirányú komponensét az a_F , a_M , ω_F , ω_M és $\cos \varphi$ paraméterekkel kifejezve! (3 p)
- Határozd meg a Mars Földről megfigyelhető mozgásának háttércsillagokhoz viszonyított ω''_M szögsebességét szintén az a_F , a_M , ω_F , ω_M és $\cos \varphi$ paraméterekkel kifejezve! (4 p)
- A Mars akkor kezdi meg és fejezi be a retrográd mozgását, amikor a Földről látszó szögsebessége nulla lesz. Számítsd ki a φ azon $\varphi_{1,2}$ értékeit, amelyekre ez teljesül, azaz ω''_M nulla lesz! Az eredményt fokban add meg, egy tizedesjegyre kerekítve! (2 p)
- Határozd meg, hogy egy szinodikus keringési periódusa alatt a Mars milyen hosszú ideig mozog retrográd irányban a földi égbolton! Jelölje ezt t_{ret} . Az eredményt napban add meg, egésze kerekítve! (3 p)

4. Poláris wifi-jeladó

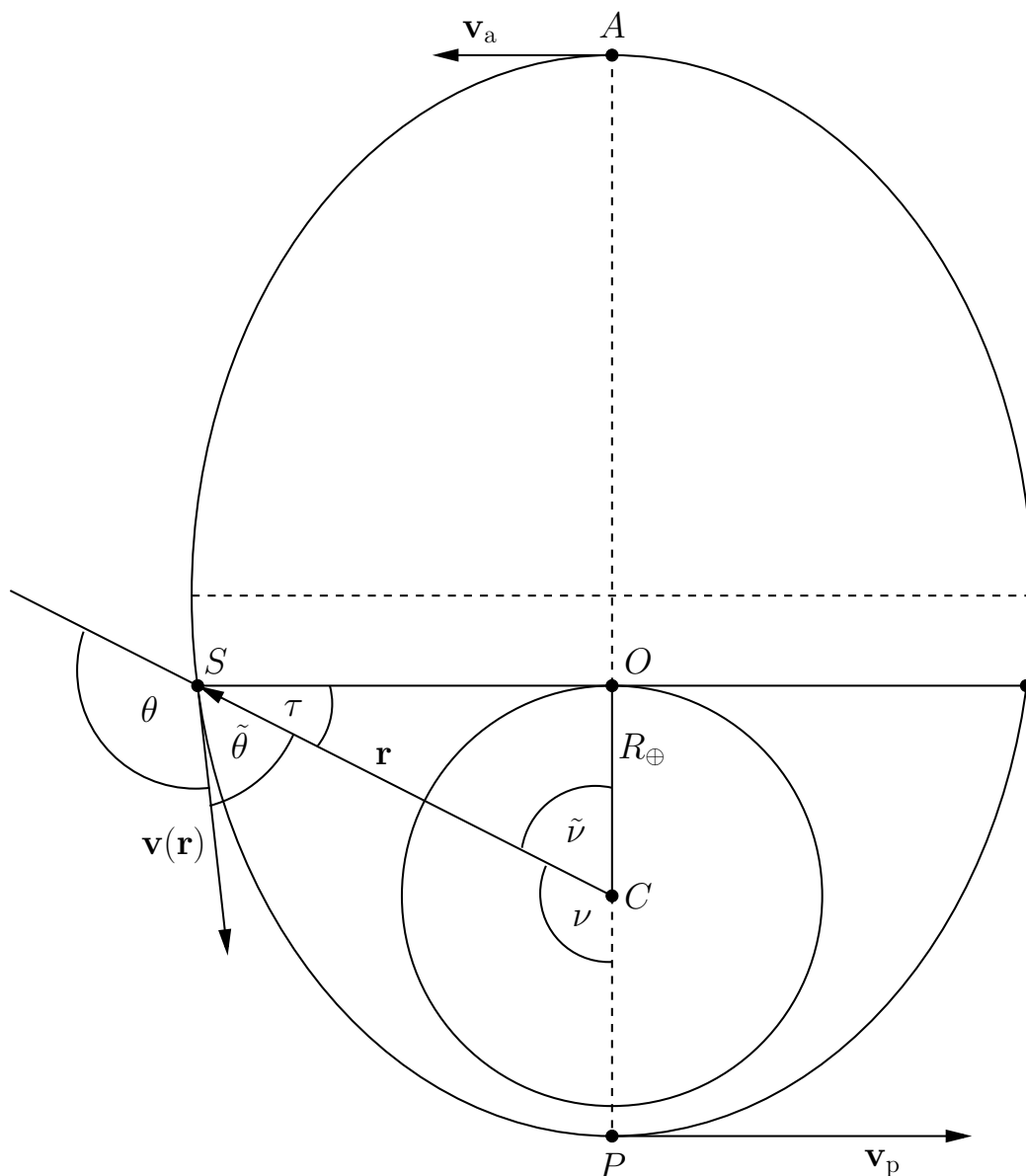
25 p

Egy, a Föld körül poláris pályán mozgó műhold pályájának fél nagytengelye $a = 15\,400$ km, a pálya excentricitása $e = 0,55$, inklinációja $i = 90^\circ$, pericentrumának argumentuma pedig $\omega = 270^\circ$. (Ez utóbbi azt jelenti, hogy a műhold pályájának perigeuma a Föld déli pólusa felett van.)

Képzeljünk el egy megfigyelőt, aki pontosan a Föld északi pólusán helyezkedik el. Amikor éppen a megfigyelő horizontján halad át, a műhold transzpondere kibocsát egy $f = 2,4$ GHz frekvenciájú jelet.

- Határozd meg a megfigyelő és a műhold távolságát a jel kibocsátásának pillanatában! Az eredményt kilométerben add meg, egészre kerekítve! (5 p)
- Határozd meg a műhold térbeli sebességének nagyságát ugyanebben a pillanatban! Az eredményt km s^{-1} egységben add meg, két tizedesjegyre kerekítve! (2 p)
- Mekkora eltolódást észlel a megfigyelő a műhold által kibocsátott jel frekvenciájában? Az eredményt kHz egységben add meg, egészre kerekítve! (18 p)

Az alábbi ábra – minden egyéb magyarázat nélkül – segítségedre lehet a megoldásban.



5. Strömgren-gömbök

30 p

Ionizációnak nevezzük azt a folyamatot, amely során az atomok – a molekulák most nem fontosak – külső hatásra egy vagy több elektronjukat elvesztik, így szabad elektronok, illetve pozitív töltésű ionok keletkeznek. A külső behatás lehet ütközés más atomokkal vagy a sugárzási tér fotonjaitól kapott energia. Egy atom ionizációjához – azaz egy elektron leszakításához – szükséges energia az úgynevezett ionizációs energia (I), amelynek értékét általában eV (elektronvolt) egységben adják meg ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

A csillagászatban a semleges – tehát nem ionizált – atomok jelölése AI, az egyszeresen ionizáltaké AII, a kétszeresen ionizáltaké AIII és így tovább, ahol A az atom vegyjele, az I, II, III stb. pedig az *ionizáció fokát* jelző római számok. Ha egy térrészben minden atom ionizált állapotban van, akkor azt mondjuk, hogy ott a közeg teljesen ionizált.

A fordított folyamat a *rekombináció*, amely során egy pozitív töltésű ion befog egy elektront, és újra semleges atom lesz belőle. (Számunkra most csak az egyszeres ionizáció érdekes.) *Ionizációs egyensúlyról* beszélünk, ha adott időtartam alatt átlagosan ugyanannyi ionizációs és rekombinációs esemény történik.

A Strömgren-gömbök olyan gömbszimmetrikus zónák O és B színeképtípusú csillagok körül, amelyekben a csillagok Lyman-kontinuumba eső fotonjai ($h\nu > I_{\text{H}} = 13,6 \text{ eV}$) teljes egészében ionizálják az ott található semleges hidrogénatomokat (HI), így a gömbön belül csak ionizált hidrogén (HII) van.

Tekintsünk egy fényes kék csillagot, amely egy gömbszimmetrikus, $n_{\text{H}} = 10^8 \text{ m}^{-3}$ számsűrűségű, egyenletes sűrűségeloszlású, T_{HII} hőmérsékletű hidrogénfelhő közepén foglal helyet. Azokra a fotonokra, amelyek mindegyike képes ionizálni a hidrogént, a csillag kibocsátási üteme $\phi_{\text{f}} = 10^{49} \text{ s}^{-1}$. Tegyük fel, hogy a Strömgren-gömbön belül a hidrogén teljesen ionizált állapotban van, valamint azt, hogy az ionizáció és a rekombináció egyensúlyban van. Csak a Strömgren-gömbön belüli rekombinációs folyamatokat vizsgáljuk, a távolabbi, részlegesen ionizált térrészben bekövetkező rekombinációs folyamatokból származó fotonok hatását elhanyagoljuk. A rekombináció üteme arányos a protonok n_{p} és az elektronok n_{e} számsűrűségével, valamint egy hőmérséklettől függő $\alpha = \alpha(T)$ rekombinációs állandóval. A T_{HII} hőmérsékleten $\alpha(T_{\text{HII}}) = 10^{-19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Egyelőre tekintsünk el a rekombináció során keletkező fotonoktól.

- Vezess le összefüggést a Strömgren-gömb R_{S} sugarára a fentebb megadott paraméterek felhasználásával, és határozd meg annak konkrét számértékét is! Az eredményt fényévben add meg, két tizedesjegyre kerekítve! (5 p)
- Adj becslést arra, hogy mennyi idő alatt jöhet létre egy ilyen Strömgren-gömb, ha a rekombinációtól eltekintünk! Az eredményt évben add meg, egészre kerekítve! (3 p)

Valójában a rekombinációs események 40%-a ismét olyan fotonokat hoz létre, amelyek szintén képesek a hidrogén ionizációjára.

- Vezess le egy új összefüggést a Strömgren-gömb sugarára, amely már a rekombináció során keletkező fotonok hatását is figyelembe veszi! Add meg az R_{S} új konkrét értékét is, szintén fényévben és két tizedesjegyre kerekítve! (4 p)

Segítség: $|r| < 1$ esetén $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

A Buborék-köd (NGC 7635, Caldwell 11) az egyik legismertebb példája a Strömgren-gömböknek, távolsága tőlünk $d = 3400 \text{ pc}$. A közel gömb alakú köd látszó szögátmérője $\theta = 3'$, felületi fényessége pedig $\mu = 14,94^{\text{m}} / (')^2$, azaz $14,94^{\text{m}}$ négyzetívpercenként.

- d) Határozd meg a Buborék-köd Földről észlelhető látszó fényességét! Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve add meg! (3 p)

Segítség: A μ felületi és az m látszó fényesség között az

$$\mu = m + 2,5 \lg A$$

formula teremt kapcsolatot, ahol A a megfelelő egységben kifejezett felület mérőszáma, \lg pedig a 10-es alapú logaritmus.

- e) Képzeld magunkat a gömb alakúnak tekintett köd középpontjába! Milyen látszó fényességűnek éreznénk a ködöt ebből a pozícióból? Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve add meg! (15 p)

Segítség: Célszerű több lépésre bontani a feladatot. Először a Földről mérhető látszó fényességével történő összevetés alapján határozd meg, hogy a köd egységnyi térfogateleme hány magnitúdóval járul hozzá annak 10 parszokról mérhető abszolút fényességéhez. Tegyük fel, hogy minden térfogatelem hozzájárulása ugyanakkora. Ezután a gömb alakú ködöt gondolatban bontsd vékony gömbhéjakra, és határozd meg, hogy egy gömbhéj mennyivel járul hozzá a centrumból mérhető látszó fényességhez. Mivel minden térfogatelem hozzájárulása ugyanakkora, az így kapott kifejezésben a gömbhéj vastagságát helyettesítheted a köd sugarával. Ügyelj arra, hogy mikor milyen egységeket használasz!

1. Hangyalesőlarva éjszakája

10 p

- a) A lárva a gödör aljáról az éggömb horizont feletti feléből csak egy gömbsüveget láthat, amelynek középpontja a zenitjében van, határoló körének síkja pedig a horizonttal párhuzamosan fut, mégpedig $\theta = 34^\circ$ magasságban, ahogyan azt a megadott ábra is mutatja.

A gömbsüveg magassága:

$$h = r - r \sin \theta = r(1 - \sin \theta) \quad (1 \text{ p})$$

A gömbsüveg felszíne így $S_{\text{gs}} = 2\pi r^2(1 - \sin \theta)$, a teljes égbolt felszíne pedig $S_{\text{té}} = 4\pi r^2$, így a kettő aránya:

$$\frac{S_{\text{gs}}}{S_{\text{té}}} = \frac{2\pi r^2(1 - \sin \theta)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \sin \theta}{2} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{\frac{S_{\text{gs}}}{S_{\text{té}}} = 0,22 = 22\%} \quad (1 \text{ p})$$

- b) Jelölje az éggömb északi pólusát P , a lárva zenitjét Z , a csillag égi pozícióját pedig C . A PZC gömbháromszög az úgynevezett *csillagászati gömbháromszög*, amelyet a megadott ábra is mutat. A csillag azimutját jelölje A , a horizont feletti magasságát pedig m . A PZC csillagászati gömbháromszögből a gömbháromszögtani koszinusztétellel:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - m) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - m) \cos(180^\circ - A) \quad (1 \text{ p})$$

Azaz:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin m - \cos \varphi \cos m \cos A \quad (1 \text{ p})$$

A csillag a lárva nézőpontjából keleten kel, ekkor számára $A = 90^\circ$ és $m = \theta$, így:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin \theta \rightarrow \delta = \arcsin(\sin \varphi \sin \theta) \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{\delta = 24,37^\circ} \quad (1 \text{ p})$$

- c) A PZC csillagászati gömbháromszögre felírt gömbháromszögtani szinusztételből a kelés óraszögére, figyelembe véve, hogy $A = 90^\circ$:

$$\frac{\sin t}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{\sin A}{\sin(90^\circ - \delta)} \rightarrow t = \arcsin\left(\frac{\cos \theta}{\cos \delta}\right) \quad (1 \text{ p})$$

A napi ív hossza ennek kétszerese, azaz a csillag lárva horizontja feletti tartózkodási ideje órában:

$$\tau = 2 \arcsin\left(\frac{\cos \theta}{\cos \delta}\right) \frac{23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}}{2\pi} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{\tau = 8,71^{\text{h}}} \quad (1 \text{ p})$$

2. Ikek egymás melegében

15 p

a) Az izolált esetben a Stefan–Boltzmann-törvény alapján a csillagok luminozitása:

$$L_{\star} = 4\pi R_{\star}^2 \sigma T_{\star}^4 \quad (1 \text{ p})$$

Ebből:

$$T_{\star} = \sqrt[4]{\frac{L_{\star}}{4\pi R_{\star}^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2000 L_{\odot}}{4\pi (86 R_{\odot})^2 \sigma}} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{T_{\star} = 4160 \text{ K}} \quad (1 \text{ p})$$

b) Ha a csillagok a viszonylag kicsi $d = 1000 R_{\odot}$ távolságra vannak egymástól, akkor melegítik is egymást. Így mindkét csillag L luminozitása a csillag saját L_{\star} luminozitásából és abból az I sugárzási teljesítményből áll össze, amelyet a másik csillagtól kap. (1 p)

Mivel a megadott számértékek alapján $R_{\star} \ll d$, I -t egy nagyon nagy távolságban lévő pontszerű forrásból kapott teljesítményként számolhatjuk. (1 p)

Azaz:

$$I = \frac{L_{\star}}{4\pi d^2} \pi R_{\star}^2 = \left(\frac{R_{\star}}{2d}\right)^2 L_{\star} \quad (2 \text{ p})$$

A beállt sugárzási egyensúlyt és a Stefan–Boltzmann-törvényt összegezve a következő formában írhatjuk fel:

$$L = L_{\star} + I = L_{\star} + \left(\frac{R_{\star}}{2d}\right)^2 L_{\star} = 4\pi R_{\star}^2 \sigma (T_{\star} + \Delta T)^4 \quad (2 \text{ p})$$

Ebből a tényleges luminozitás:

$$L = L_{\star} \left[1 + \left(\frac{R_{\star}}{2d}\right)^2 \right] \quad (2 \text{ p})$$

Végül pedig a hőmérséklet-változás:

$$\Delta T = \sqrt[4]{\frac{L_{\star}}{4\pi R_{\star}^2 \sigma}} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{R_{\star}}{2d}\right)^2} - T_{\star} = T_{\star} \left\{ \left[1 + \left(\frac{R_{\star}}{2d}\right)^2 \right]^{1/4} - 1 \right\} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{\Delta T \approx 1,9 \text{ K}} \quad (1 \text{ p})$$

3. A Mars retrográd mozgása

20 p

a) A keresett szögsebesség:

$$\omega'_M = \omega_M - \omega_F \quad (2 \text{ p})$$

b) Az FNM háromszögből a koszinusztétel alapján:

$$r(\varphi) = \sqrt{a_M^2 + a_F^2 - 2a_M a_F \cos \varphi} \quad (2 \text{ p})$$

c) Az NMF háromszögben az M csúcsnál lévő szög szintén ψ , így szintén a koszinusztételből:

$$a_F^2 = r^2 + a_M^2 - 2ra_M \cos \psi \quad (1 \text{ p})$$

Ebből pedig:

$$\cos \psi = \frac{r^2 + a_M^2 - a_F^2}{2ra_M} \quad (1 \text{ p})$$

Azaz:

$$\cos \psi = \frac{a_M - a_F \cos \varphi}{\sqrt{a_M^2 + a_F^2 - 2a_M a_F \cos \varphi}} \quad (2 \text{ p})$$

d) Jelölje a H_F rendszerben a Mars pálya menti sebességét $v = \omega'_M a_M$. Ekkor:

$$v_t = v \cos \psi \quad (1 \text{ p})$$

Azaz:

$$v_t(\varphi) = \frac{(\omega_M - \omega_F)(a_M^2 - a_M a_F \cos \varphi)}{\sqrt{a_M^2 + a_F^2 - 2a_M a_F \cos \varphi}} \quad (2 \text{ p})$$

e) Mivel

$$\omega''_M = \omega_F + \frac{v_t}{r}, \quad (2 \text{ p})$$

így a helyettesítés után:

$$\omega''_M = \frac{\omega_M a_M^2 + \omega_F a_F^2 - (\omega_M + \omega_F) a_M a_F \cos \varphi}{a_M^2 + a_F^2 - 2a_M a_F \cos \varphi} \quad (2 \text{ p})$$

f) $\omega''_M = 0$ esetén az előző egyenletből:

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{\omega_M a_M^2 + \omega_F a_F^2}{(\omega_M + \omega_F) a_M a_F} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\varphi_{1,2} = \mp 16,8^\circ \quad (1 \text{ p})$$

g) A retrográd irányú mozgás időtartama:

$$t_{\text{ret}} = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{T_{\text{szin}}}{2\pi} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_F - \omega_M} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel:

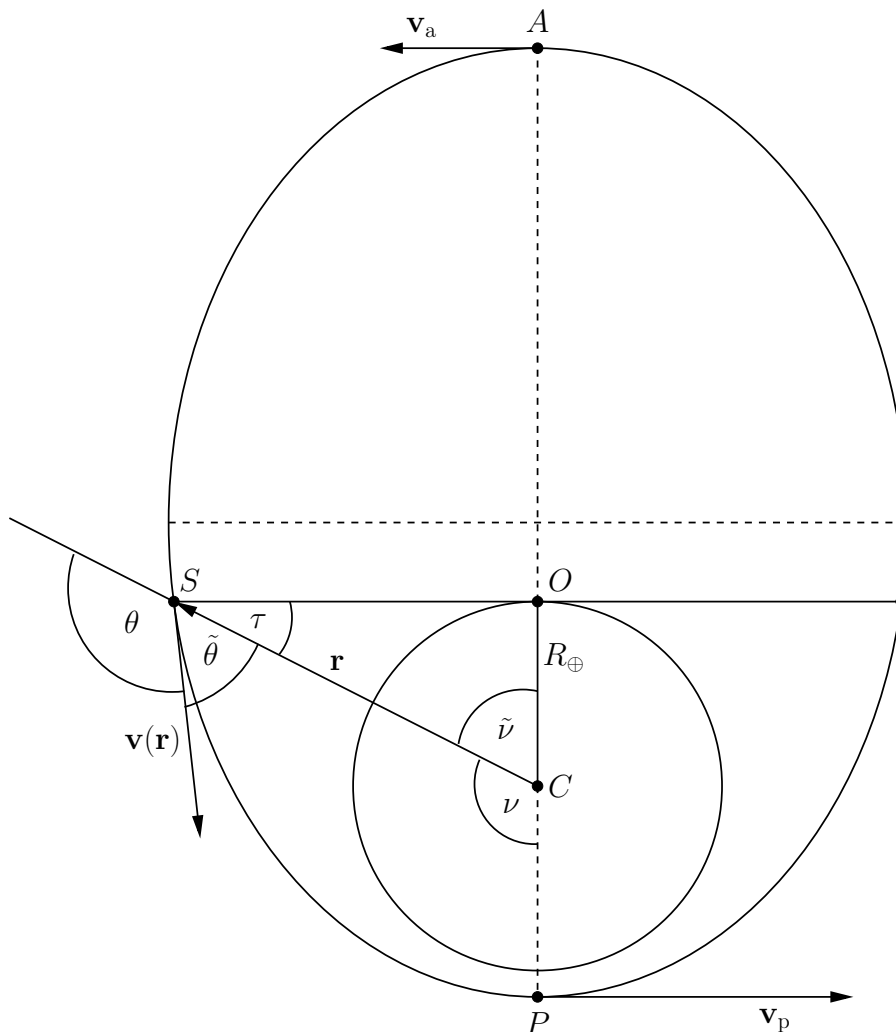
$$t_{\text{ret}} \approx 73^{\text{d}} \quad (1 \text{ p})$$

4. Poláris wifi-jeladó

25 p

Az ábrán a jelölések a következők:

- C a Föld középpontja
- O az északi póluson elhelyezkedő megfigyelő
- R_{\oplus} a Föld sugara (d_{OC})
- P a műhold pályájának perigeum-, A pedig az apogeumpontja
- S a műhold pálya menti pozíciója a jel kisugárzásakor
- \mathbf{r} a műhold helyvektora az S pontban
- \mathbf{v}_p a műhold sebességvektora a perigeumban
- \mathbf{v}_a a műhold sebességvektora az apogeumban
- $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ a műhold sebességvektora az S pontban
- θ az \mathbf{r} helyvektor és a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességvektor által bezárt
- $\tilde{\theta}$ a θ kiegészítő szöge: $\tilde{\theta} = 180^\circ - \theta$
- τ a megfigyelő horizontjának síkja és az \mathbf{r} helyvektor által bezárt szög
- ν az \mathbf{r} helyvektor és a perigeum iránya által bezárt szög
- $\tilde{\nu}$ a ν kiegészítő szöge: $\tilde{\nu} = 180^\circ - \nu$



- a) Határozzuk meg először a műhold geocentrikus távolságát a jel kibocsátásának pillanatában, azaz az $r = |\mathbf{r}| = d_{SC}$ távolságot! Tudjuk, hogy:

$$\begin{cases} r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \\ R_{\oplus} = r \cos \tilde{\nu} = -r \cos \nu \end{cases}$$

A két egyenletből:

$$r = a(1 - e^2) + eR_{\oplus} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel: $r = 14\,246 \text{ km}$ (1 p)

A megfigyelő és a műhold távolsága a jel kibocsátásának időpontjában a COS derékszögű háromszögből:

$$d_{OS} = \sqrt{r^2 - R_{\oplus}^2} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{d_{OS} = 12\,742 \text{ km}} \quad (1 \text{ p})$$

- b) A műhold térbeli sebességének nagysága az S pontban, a jel kibocsátásakor:

$$v(r) = |\mathbf{v}(\mathbf{r})| = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \rightarrow v^2 = GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{v = 5,48 \text{ km s}^{-1}} \quad (1 \text{ p})$$

- c) Először határozzuk meg a műhold térbeli sebessége megfigyelő látóirányába eső komponensének nagyságát!

Állandósága miatt az S és a P pontbeli impulzusnyomaték – így ennek négyzete is – egyenlő:

$$r^2 v^2 \sin^2 \theta = r_p^2 v_p^2 \quad (2 \text{ p})$$

A P pontban a centrumtól mért távolság és a sebesség négyzete:

$$r_p^2 = a^2(1 - e)^2 \text{ és } v_p^2 = \frac{GM_{\oplus}}{a} \frac{1 + e}{1 - e} \quad (2 \text{ p})$$

Ezt felhasználva az előző egyenletből:

$$r^2 v^2 \sin^2 \theta = a^2(1 - e)^2 \frac{GM_{\oplus}}{a} \frac{1 + e}{1 - e} = GM_{\oplus} a(1 - e^2) \quad (2 \text{ p})$$

A v^2 kifejezését is figyelembe véve a $\sin \theta$ -ra a következő összefüggést kapjuk:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{a(1 - e^2)}{r^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel: $\sin \theta = 0,8375 \rightarrow \theta_1 = 56,9^\circ$ és $\theta_2 = 123,1^\circ$ (2 p)

Az ábra S pontjának nyilván a $\theta = \theta_2$ szög felel meg, a θ_1 a „szimmetrikus” ponthoz tartozik, ahol a műhold a megfigyelő horizontja fölé emelkedik. (1 p)

A τ szögre a COS derékszögű háromszögből:

$$\tau = 90^\circ - \tilde{\nu} = 90^\circ - \arccos \frac{R_\oplus}{r} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel: $\tau = 26,6^\circ$ (1 p)

A sebességvektor iránya és a megfigyelő látóiránya közötti szög:

$$\psi_{1,2} = \tilde{\theta}_{1,2} + \tau \quad (1 \text{ p})$$

Végül a sebességvektor megfigyelő látóirányába eső vetületének nagysága:

$$v_{SO} = v \cos \psi_{1,2} = v \cos(\tilde{\theta}_{1,2} + \tau) \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel: $v_{SO} = \pm 0,63 \text{ km s}^{-1}$ (1 p)

A jel frekvenciájában a műhold megfigyelőhöz képesti mozgásának radiális komponense által okozott Doppler-eltolódás:

$$\Delta f = \frac{v_{SO}}{c} f \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{\Delta f \approx \pm 5 \text{ kHz}} \quad (1 \text{ p})$$

5. Strömgren-gömbök

30 p

a) Mivel egy hidrogénatom ionizációjakor egy proton és egy elektron szabadul fel, ezért:

$$n_p = n_e = n_H \quad (1 \text{ p})$$

A hidrogén ionizációjának ϕ_f üteme megegyezik a rekombináció ütemével, azaz:

$$\phi_f = n_p n_e \alpha(T_{\text{HII}}) \frac{4\pi R_S^3}{3} = n_H^2 \alpha(T_{\text{HII}}) \frac{4\pi R_S^3}{3} \quad (2 \text{ p})$$

Ebből:

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{3\phi_f}{4\pi\alpha(T_{\text{HII}})n_H^2}} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$R_S = 1,34 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

Azaz:

$$\boxed{R_S = 14,13 \text{ fényév}} \quad (1 \text{ p})$$

b) Ha a rekombinációtól eltekintünk, a Strömgren-gömb létrejöttéhez szükséges időre úgy adhatunk becslést, hogy az abban lévő hidrogénatomok számát elosztjuk az ionizációra képes fotonok kisu-gárzási ütemével, azaz:

$$t_S = \frac{4\pi n_H R_S^3}{3\phi_f} \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$t_S = 10^{11} \text{ s}$$

Azaz:

$$\boxed{t_S = 3169 \text{ év}} \quad (1 \text{ p})$$

c) Mivel a rekombinációs események 40%-a is ionizációra képes fotonokat hoz létre, így az új sugárra:

$$R_{S,\text{új}}^3 = (1 + 0,4 + 0,4^2 + \dots) R_S^3 \quad (2 \text{ p})$$

Az összegzést elvégezve:

$$R_{S,\text{új}}^3 = \frac{5}{3} R_S^3 \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$R_{S,\text{új}} = 1,58 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

Azaz:

$$\boxed{R_{S,\text{új}} = 16,75 \text{ fényév}} \quad (1 \text{ p})$$

d) A köd látszó felszíne:

$$A = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \pi \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$A = 7,1'^2 \quad (1 \text{ p})$$

Látszó fényessége a megadott formula alapján:

$$\boxed{m = 12,82^m} \quad (1 \text{ p})$$

e) A köd sugara:

$$R = d \frac{\theta}{2} \quad (1 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$R = 1,48 \text{ pc} = 4,84 \text{ fényév} \quad (1 \text{ p})$$

A köd egységnyi térfogatelemének (fajlagos) abszolút fényessége:

$$M_{\text{sp}} = m + 2,5 \lg\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right) - 5 \lg\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right) \quad (3 \text{ p})$$

Itt m a köd látszó fényessége a Földről nézve – ezt az előbb számoltuk ki –, R a köd sugara méterben kifejezve, d a távolsága parszekben, a 10-es alapú logaritmus argumentumában álló teljes térfogatát pedig osztani kell az egységnyi (1) térfogattal, de ezt nem jelöljük.

Számértékekkel:

$$M_{\text{sp}} = 126,7^m \quad (1 \text{ p})$$

Bontsuk a gömb alakú ködöt vékony, dr vastagságú gömbhéjakra. Az r és az $r + dr$ sugár közötti gömbhéj térfogata:

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (2 \text{ p})$$

Ennek a látszó fényessége a gömb középpontjából nézve (r -t parszekben megadva, és a $4\pi r^2 dr$ -t az egységnyi térfogattal osztva, amit továbbra sem jelölünk):

$$dm_c = M_{\text{sp}} - 2,5 \lg(4\pi r^2 dr) + 5 \lg\left(\frac{r}{10}\right) \quad (2 \text{ p})$$

A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$dm_c = M_{\text{sp}} - 2,5 \lg(4\pi dr) - 5 \lg 10 \quad (2 \text{ p})$$

Mivel a teljes fluxushoz minden térfogatelem ugyanakkora értékkel járul hozzá, ezért a teljes látszó fényességet úgy kaphatjuk, hogy ebben a kifejezésben dr -t a köd méterben kifejezett R sugarával helyettesítjük, és a 10 pc-t is méterben fejezzük ki:

$$m_c = M_{\text{sp}} - 2,5 \lg(4\pi R) - 5 \lg(10 \cdot 3,09 \cdot 10^{16}) \quad (2 \text{ p})$$

Számértékekkel:

$$\boxed{m_c = -5,18^m} \quad (1 \text{ p})$$