

Athletica Galactica csillagászati szakkör

tanári segédlet és példatár 2025

1. Gravitáció és égi mechanika

Kulcsszavak: Gravitációs erő, gyorsulás és potenciális energia. Az ellipszis fogalma (fél nagytengely, fél kistengely, lineáris és numerikus excentricitás, pericentrum, apocentrum, semi-latus rectum) és területe. Kepler-törvények, a Naprendszer égitestjei és mozgásuk. Kozmikus sebességek, műholdak mozgása (geostacionárius és geoszinkron pálya). Kéttest- és egycentrum-probléma; tömegközéppont, komponensek sebességei. Pályaelemek. Pályák összenergiája, ellipszispálya sebességképlete. A bolygók látszó mozgása az égbolton, elongáció, a Hold és a bolygók fázisai. Szinodikus és sziderikus keringési idő.

1. Szükséges fizikai ismeretek

- Newton-féle gravitációs erőtvény
- gravitációs állandó
- gravitációs gyorsulás kifejezése és földi értéke
- Newton-törvények
- körmozgás
- centripetális gyorsulás és centrifugális erő
- körpálya sebessége

2. Kapcsolódó csillagászati ismeretek

- **A Naprendszer felépítése:** Naprendszerünk központi égitestje a Nap. Naprendszer definíciója, tömegközéppontja (baricentrum). A nyolc bolygó: Merkúr, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz. A kőzet- és gázbolygó csoportok, holdak. Kupier-öv és Oort-felhő.

- **Az egyes bolygók legfontosabb jellemzői:** Mekkora egymáshoz képest? Melyik csoportnak van több holdja és miért? Mik azok a Galilei-holdak? Melyik a Naprendszer 5 legnagyobb holdja, és mekkora a Merkúrhoz képest? Milyenek a jellemző hőmérsékletek az egyes bolygókon és miért? Melyik bolygó forog prográd, és melyik retrográd irányban? Mit mondhatunk az egyes égitestek forgástengelyéről a keringési síkhoz képest? Mely bolygónak van még a Szaturnuszon kívül gyűrűrendszere?
- **Kisbolygók/Aszteroidák:** Mik a jellemző méretek, alakok? A kisbolygóöv a Mars és a Jupiter pályája között. Neptunuszon túli objektumok.
- **Törpebolygók:** Definíció, a bevezetésének ideje és indoklása. Pluto, Eris, Haumea, Makemake, Ceres.
- **Üstökösök:** Mag, kóma, csóva. Por- és ioncsóva jellemzői. Tipikus pályák és keringési idők.
- **Bolygóközi por:** Az állatövi fény jelensége.
- **Mesterséges holdak mozgása:** Műholdpályák (geoszinkron, geostacionárius, poláris). Nemzetközi Űrállomás (ISS) és keringési ideje, magassága. Lagrange-pontok elhelyezkedése.
- **Exobolygók:** Más csillagok körül keringő bolygók fogalma, nevezéktana, aktuális száma. Transzit, azaz a csillag előtti átvonulás, illetve az ebből adódó fényességcsökkenés jelensége. Kepler űrtávcső.
- **Égitestek egymáshoz képest vett speciális helyzetei:** Oppozíció, elongáció, kvadratura, konjunkció. Sziderikus és szinodikus keringési idők.

2.1. Ajánlott fejezetek a *Bevezetés a csillagászatba* könyvből

3. Égi mechanika

A 101-171. oldal között: *Történeti áttekintés, Newton törvényei, Kepler törvényei, Kozmikus sebességek, Speciális pályák, Kéttest-probléma, Háromtest-probléma, Pályamódosítás.*

6. Naprendszer és exobolygók

A 307-309. oldal között: *Naprendszer.* A 337-344. oldal között: *Hold.* A 350-390. oldal között: *Bolygók.* A 390-411. oldal között: *Kisbolygók, Törpebolygók, Üstökösök, Meteoroidok.* A 420-437. oldal között: *Exobolygók.*

7. Csillagrendszerek

A 445-449. oldal között: *Tömeg meghatározása vizuális kettősökkel, fedési fénygörbe.*

2.2. További ajánlott források

Csillagászati feladatok a középiskolai fizika fejezeteihez (Gróf Andrea):

http://fiztan.phd.elte.hu/files/kiadvanyok/Csillagaszati_feladatok.pdf

Mozgás ellipszispályán (Juhász Tibor):

<http://www.zmgzeg.edu.hu/tantargy/fizika/files/Kepleregyenlet.pdf>

3. Példatár

3.1. Gravitációs gyorsulás egyes égitesteken

Számítsd ki mekkora a gravitációs gyorsulás a következő égitestek felszínén:

- a) Hold ($M_{\text{Hold}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $R_{\text{Hold}} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$)
- b) Jupiter ($M_{\text{Jupiter}} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, $R_{\text{Jupiter}} = 7 \cdot 10^7 \text{ m}$)
- c) Nap ($M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$)

Megoldás

A gravitációs gyorsulás értékét megkaphatjuk Newton II. törvényének felírásával:

$$F = ma = mg = G \frac{mM}{r^2} \quad \implies \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

Behelyettesítve az egyes égitestek tömegeit és sugarait:

- a) $g_{\text{H}} = 1,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- b) $g_{\text{J}} = 25,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- c) $g_{\odot} = 272,41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.2. Esés a Holdon

Mennyi idő alatt esik le a Holdon egy 1 méter magasságból leejtett vasgolyó? Mi a helyzet egy ugyanilyen körülmények között leejtett mogoróval?

Megoldás

Mivel az esést a Hold gravitációs tere okozza, először meg kell határoznunk az ott tapasztalható gravitációs gyorsulást:

$$g_{\text{H}} = \frac{GM}{r^2}$$

Az esés idejének kiszámításához írjuk fel a négyzetes úttörvényt:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \frac{GM}{r^2} t^2 \quad \implies \quad t = \sqrt{\frac{2sr^2}{GM}}$$

Behelyettesítés után adódik, hogy egy méter magasságból elejtett test $t = 1,09\text{ s}$ alatt esik le a Holdon.

A képletből látható az is, hogy az esés ideje független a zuhanó test tömegétől, tehát egy mogoró vagy akár egy tollpihe is pontosan ugyanennyi idő alatt esik le. A Földön a különbséget az adja, hogy a légellenállás miatt a test tömege/alakja már igenis számít.

3.3. Egy ember súlya egy exobolygón

A *Kepler* űrtávcső segítségével 2010-ben a Sárkány csillagképben, tőlünk 560 fényévnnyire, a több mint nyolcmilliárd éves Kepler-10 csillag körül felfedeztek egy földméretű bolygót, mely a *Kepler* első felfedezett kőzetbolygója volt. A Kepler-10b exobolygó a csillagtól 2,5 millió kilométer távolságban kering, 20 órás periódusidővel. A bolygó felszíni hőmérséklete meghaladja az 1500 K-t.

Tanulmányozva az exobolygó tranzitját, a Kepler-10b sugarát 1,4-szer nagyobbak találták a Földénél ($R_{\oplus} = 6370\text{ km}$), az átlagos sűrűségét pedig $8,8\text{ g/cm}^3$ -nek. Mennyi a súlya egy 60 kg-os embernek a Földön, és a Kepler-10b exobolygón?

Megoldás

Egy test súlya megegyezik azzal az erővel, amellyel a test - a Föld vagy más adott égitest nehézségi erejének hatására - az alátámasztási pontot nyomja, vagy a felfüggesztési pontot húzza.

A földi gravitációs gyorsulás értéke:

$$g_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Egy 60 kg-os ember súlya a Földön:

$$mg = 60\text{ kg} \cdot 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{589\text{ N}}$$

A Kepler-10b esetén is szükségünk van a pontos sugár és tömegadatok meghatározására:

$$R_K = 1,4 \cdot 6370 \cdot 10^3\text{ m} = 8,918 \cdot 10^6\text{ m}$$

A tömeg megbecsülhető $M_K = \rho \cdot V$ alapján, amelyhez a térfogatot gömbbel közelítve:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = 2,97 \cdot 10^{21}\text{ m}^3$$

Behelyettesítve:

$$M_K = 8,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2,97 \cdot 10^{21}\text{ m}^3 = 2,61 \cdot 10^{25}\text{ kg}$$

Ebből a gravitációs gyorsulás a Kepler-10b felszínén:

$$g_K = \frac{GM_K}{R_K^2} = 21,94\text{ m/s}^2$$

Így ugyanennek az embernek a súlya a Kepler-10b exobolygón:

$$mg = 60\text{ kg} \cdot 21,94 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{1316\text{ N}}$$

3.4. Geostacionárius műholdak keringése

A geostacionárius műholdak keringési ideje megegyezik a Föld sziderikus forgási periódusidejével. Mivel a pályájuk a Föld egyenlítői síkjában fekszik, így mindig a Föld egy adott pontja felett tartózkodnak. Milyen magasan keringenek a Föld felszíne felett?

Megoldás

A geostacionárius műholdak stabil körpályán keringenek a Föld körül, így a rájuk ható erő, vagyis a Föld gravitációs ereje biztosítja a centripetális gyorsulást:

$$G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{GM \frac{T^2}{4\pi^2}} = 42\,163 \text{ km} \quad (1)$$

Ez azonban a keringés középpontjától, azaz a Föld középpontjától vett távolság. Ahhoz, hogy a felszíntől vett távolságot megkapjuk, le kell vonnunk a Föld sugarát ($R_{\oplus} = 6370 \text{ km}$).

Tehát a geostacionárius műholdak a Föld felszíne felett **35 792 km**-rel keringenek.

3.5. Műholdak mozgása egy ismeretlen bolygó körül

Egy gömb alakú, gömbszimmetrikus tömegeloszlású, 9 000 km sugarú bolygó körül két űrszonda kering körpályán. Az egyik szonda sebessége $4800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a pályájának sugara 50 000 km. A másik szonda pályájának sugara 30 000 km.

- a) Mekkora a bolygó átlagsűrűsége?
- b) Mekkora a második szonda sebessége?

Megoldás

- a) A bolygó átlagsűrűsége annak tömegének és térfogatának ismeretében határozható meg: $\rho = \frac{M}{V}$. Míg a bolygó sugara ismert, addig a tömegét az egyik műhold mozgásából meghatározhatjuk.

Egy körpályán keringő űrszonda centripetális gyorsulása éppen a gravitációs gyorsulással egyenlő:

$$\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM}{r_1^2} \Rightarrow M = \frac{v_1^2 r_1}{G} = 1,73 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

A bolygó térfogata:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = 3,05 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$

Így a bolygó átlagsűrűségére adódik:

$$\rho = 5653 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

b) A másik szonda mozgásából kifejezhető annak sebessége:

$$\frac{v_2^2}{r_2} = \frac{GM}{r_2^2} \implies v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = 6204 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.6. A Jupiter két holdja

A Jupiter Ganymedes nevű holdja kicsit több, mint 2,5-szeres távolságban kering a Jupiter körül, mint az Io nevű holdja. Mit mondhatunk a két hold keringési idejéről? Tegyük fel, hogy a holdak körpályán keringenek.

Megoldás

Kepler III. törvénye alapján két égitest keringési idejének négyezete úgy aránylik egymáshoz, mint a pályáik fél nagytengelyének köbei:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Ha tehát az Io x távolságban kering a Jupiter körül, a Ganymedes $2,5x$ távolságban. Körpálya esetén ezek megfeleltethetők a fél nagytengelyeknek. Tehát a keringési idők arányára adódik:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2,5^3 x^3}{x^3} = 2,5^3 = 15,625.$$

Így $\sqrt{15,625} = 3,953$, azaz a **Ganymedes csaknem négyszer olyan lassan kering**, mint a társa, Io.

3.7. A Szaturnusz fél nagytengelye

Határozzuk meg a Szaturnusz pályájának fél nagytengelyét, ha a keringési ideje 29,46 év!

Megoldás

Kepler III. törvényének értelmében a bolygók a Nap körül olyan ellipszis pályákon keringenek, amelyre a fél nagytengely és a keringési idő között a következő reláció igaz:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konstans}$$

Ha a fél nagytengelyt csillagászati egységekben (CSE), a keringési időt pedig években mérjük, akkor a konstans értéke 1 lesz a Nap körül keringő égitestek esetén. Ez alapján:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = 9,54 \text{ CSE}$$

3.8. A Hale-Bopp-üstökös következő napközelsége

A Hale-Bopp-üstökös pályájának fél nagytengelye $a = 186 \text{ CSE}$, excentricitása $e = 0,995$. Legutóbb 1997-ban volt napközelen. Mikor lesz legközelebb perihéliumban, és milyen távol lesz ekkor a Naptól?

Megoldás

Határozzuk meg az üstökös keringési idejét Kepler III. törvénye alapján:

$$T = \sqrt{a^3} = 2536,7 \text{ év}$$

Mivel legutóbb 1997-ban volt perihéliumban, így a legközelebbi napközelsége **4534**-ben várható.

A perihéliumtávolságot megkaphatjuk úgy, hogy az ellipszis fél nagytengelyéből kivonjuk a c lineáris excentricitást, azaz az ellipszis közép- és fókuszpontja közötti távolságot. A lineáris excentricitás a fél nagytengely és a (numerikus) excentricitás szorzataként számíthatjuk ki, azaz:

$$c = ae = 185,07 \text{ CSE}$$

A perihélium távolságra így adódik:

$$r_p = a - c = a(1 - e) = \mathbf{0,93 \text{ CSE}}$$

3.9. A Hold látszó átmérője

Ha a Hold pályájának excentricitása 0,6 lenne, hányszor akkorának látszana az átmérője perigeum idején, mint apogeum idején? A Hold sugara $R_H = 1700 \text{ km}$, tőlünk mért átlagos távolsága $d_H = 384\,000 \text{ km}$.

Megoldás

Mivel csak a Hold pályájának excentricitását változtattuk, a fél nagytengelye továbbra is megegyezik az eredetileg vett körpálya sugarával, d_H -val. A megfigyelők a Földön természetesen a fókuszpontban vannak. Határozzuk meg először a perigeum és apogeum távolságát, azaz a legkisebb és legnagyobb távolságokat!

$$r_p = a - c = a - (ae) = a(1 - e) = 153\,600 \text{ km}$$

$$r_a = a + c = a + (ae) = a(1 + e) = 614\,400 \text{ km}$$

A látszó átmérő az a szögátmérő, ami alatt egy adott sugarú objektum, adott távolságból látszik. Jelen esetben ez:

$$\vartheta = 2 \cdot \arctan\left(\frac{R_H/2}{d_H}\right)$$

Ezalapján a két látszó átmérő aránya kifejezhető:

$$\frac{\tan(\vartheta_p)}{\tan(\vartheta_a)} = \frac{2 R_H/2 \cdot r_a}{2 r_p \cdot R_H/2} \approx \frac{\vartheta_p}{\vartheta_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1 + e}{1 - e} \approx \mathbf{4}$$

3.10. Egy bolygó két oppozíciója

Egy bolygó két oppozíciója között 398,9 nap telt el. Az oppozícióban a bolygó szögátmérője 47,2" volt. Határozzuk meg a bolygó sziderikus keringési idejét, pályájának fél nagytengelyét és valódi méretét kilométerben! Melyik bolygóról van szó?

Megoldás

Egy bolygó szinodikus keringési periódusa definiálható a bolygó két egymást követő oppozíciója között eltelt idővel is. A Föld sziderikus keringési idejéhez képest ($T_F^{\text{szid}} = 365$ nap) a keresett bolygó T_X^{szid} sziderikus és T_X^{szin} keringési ideje között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{1}{T_X^{\text{szin}}} = \frac{1}{T_F^{\text{szid}}} - \frac{1}{T_X^{\text{szid}}} \quad \rightarrow \quad T_X^{\text{szid}} = \frac{T_F^{\text{szid}} T_X^{\text{szin}}}{T_X^{\text{szin}} - T_F^{\text{szid}}} = \mathbf{11,8 \text{ év}}$$

A fél nagytengelyeket csillagászati egységben, a keringési periódusokat pedig évben mérve Kepler III. törvénye alapján:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{11,8^3} \approx \mathbf{5,2 \text{ CSE}}$$

Oppozícióban a Föld és a bolygó távolsága:

$$r = 5,2 \text{ CsE} - 1 \text{ CsE} = 4,2 \text{ CsE} = 4,2 \cdot 1,49 \cdot 10^8 \text{ km} = 6,26 \cdot 10^8 \text{ km}$$

A bolygó átmérője:

$$d = r \cdot \tan \vartheta \approx r \cdot \vartheta = 6,26 \cdot 10^8 \text{ km} \cdot 47,2'' \approx \mathbf{144\,000 \text{ km}}$$

A bolygó sziderikus keringési ideje tehát 11,8 év, a pályájának fél nagytengelye 5,2 CSE, a valódi átmérője pedig 144 000 km, így a bolygó egyértelműen a **Jupiter**.

3.11. Üstökös maximális sebessége keringése során

Egy üstökös pályájának excentricitása $e = 0,995$, aphélium-távolsága $r_a = 5,104$ CSE. Mekkora a legnagyobb sebessége keringése során? A Nap tömege $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

Megoldás

A keringés során elérhető legnagyobb sebességet - Kepler II. törvénye alapján - a perihéliumban éri el az üstökös: $v_{\text{max}} = v(r_p)$. Írjuk fel tehát az általános sebességképletet, ahol $r = r_p$ -t helyettesítünk be a távolságra! Ehhez szükségünk lesz magának az r_p perihélium-távolságnak, valamint az a fél nagytengelynek a meghatározására is. Mindkettő kifejezhető a megadott excentricitás és aphélium távolság adatokkal.

A fél nagytengely:

$$a = \frac{r_a}{1 + e},$$

míg a perihélium-távolság:

$$r_p = r_a \cdot \frac{1 - e}{1 + e}.$$

Ezek alapján a maximális sebesség:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} \approx \mathbf{372 \frac{\text{km}}{\text{s}}}$$

3.12. A Mars sebessége a kistengely végpontján

A Mars pályájának excentricitása $e = 0,093$, fél nagytengelye $a = 1,524$ CSE. Mekkora a sebessége, amikor éppen a kistengely egyik végpontjában van?

Megoldás

Az ellipszis kistengelyének egyik végpontja pontosan egy fél nagytengely távolságra van a fókuszponttól. Így az általános sebességképletben:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

az $r = a$ helyettesítéssel a következő alakra egyszerűsödik a kérdéses sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \mathbf{24,1 \frac{km}{s}}$$

3.13. Az átváltozott Föld

Dionüszosz isten megjutalmazta Midász királyt szolgálataiért egy kívánsággal. Midász király azt kívánta, hogy bármi, amihez ujjával hozzáér, változzon arannyá. Nagy örömeiben azonban hazafelé menet véletlenül megbotlott, és kezével hozzáért a földhöz, így az egész bolygó hirtelen arannyá változott.

Vagy mégsem? Az istenség becsapta a királyt, és nem arannyá változtatta a bolygót, hanem valami egészen mássá. Mi lehet ez a különös anyag?

- a) A bolygóra küldött szorgos fizikusok meg szeretnék volna mérni az új gravitációs gyorsulást. Ehhez egy matematikai ingát használtak, melynek a periódusidejét mérték kis kitéréseknél. Hogy pontosabb legyen a mérésük, 10 lengésnek mérték le az idejét, ami 55,3 másodpercnek adódott. Az inga hossza $l = 4,2$ m. Mekkora gyorsulást mértek?
- b) Az előbbi mérés eredménye alapján milyen anyag alkothatja immár a bolygót, ha annak az eredetileg Földünkével megegyező sugara nem változott meg? A változás a bolygó magjáig bekövetkezett, egy homogén gömbként gondolhatunk rá. A különböző anyagok sűrűségét az 1. táblázatban láthatjátok.

anyag	ρ [kg/dm ³]	anyag	ρ [kg/dm ³]	anyag	ρ [kg/dm ³]
arany	19,3	grafit	2,2	márvány	2,7
cukor	1,6	gyémánt	3,05	porcelán	2,3
ezüst	10,5	jég	0,92	üveg	2,8

1. táblázat: A lehetséges anyagok sűrűsége.

- c) A Föld körül keringő, mit sem sejtő űrhajósokat ez a hirtelen esemény nagyon meglepte. Éppen egy békés, 420 km magasságú körpályáról vizsgálták a bolygót. A bolygó hirtelen tömegváltozásának hatására az űrhajójuk egy ellipszispályára állt át. Ennek az új pályának melyik nevezetes pontja lett az a pont, ahol a baleset időpontjában éppen tartózkodtak? Milyen magasan lesz az új pálya legalacsonyabb és legmagasabb pontja a bolygó felszínéhez képest?
- d) Mi lenne az a minimális tömeg, amire megváltozhatna a bolygó úgy, hogy az űrhajósok ne szakadjanak el tőle kötött pályáról, azaz még pont ne rendelkezzenek második kozmikus sebességgel?

Megoldás

- a) Egy matematikai ingára az alábbi összefüggés írható fel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l = 5,42 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) Határozzuk meg a bolygó átlagsűrűségét:

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \text{ahol } V = \frac{4}{3}R^3\pi$$

A bolygó tömege meghatározható onnan, hogy tudjuk, a gravitációs gyorsulást a felszínen mérhető nehézségi erő okozza:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G} = 3,3 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 0,55 M_{\oplus}$$

Így a kapott sűrűség **3046,5 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$** , ami a **gyémánt** sűrűségének felel meg.

- c) Ha a központi égitest tömege hirtelen lecsökken, a körülötte keringő űrhajó nagyobb pályára szeretne állni. Az aktuális pont azonban továbbra is része marad az új pályának, így minden további más pont fog tudni messzebb kerülni a fókuszponttól. **A baleset helyszíne tehát az új pálya pericentruma lesz**, a bolygóhoz legközelebbi pontja a pályának.

Ennek értelmében az r_p pericentrum-távolság megegyezik az eredeti körpálya sugarával. Így az új pálya legalacsonyabb pontja a bolygó felszínéhez képest továbbra is **$h_p = 420 \text{ km}$** .

Ahhoz, hogy az r_a apogeum-távolságokat kiszámoljuk (és abból a h_a értékét kifejezhessük), szükségünk lesz az új pálya fél nagytengelyére, mely az energiamegmaradás egyenletének felírásából kifejezhető: $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{tot}}$.

Tudjuk, hogy az ellipszispálya energiájára, mely a rendszer összenergiáját definiálja, felírható a következő alakban:

$$E = -\frac{GmM}{2a},$$

Kifejtve az egyes tagokat mindkét oldalon:

$$-\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GmM}{2a}$$

Mivel a perigeum paraméterei ismertek, helyettesítsük be azokat. A távolságra: $r = r_p = R_{\oplus} + h_p$, a sebességre pedig a körpálya sebessége (első kozmikus sebesség):

$$\frac{GmM_0}{(R_{\oplus} + h_p)^2} = \frac{mv_0^2}{(R_{\oplus} + h_p)} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_0}{(R_{\oplus} + h_p)}}$$

Fontos, hogy itt a bolygó M_0 kezdeti tömegét kell használni! Ezt behelyettesítve az energiamegmaradás egyenletébe, kis átrendezéssel és egyszerűsítéssel:

$$\frac{M_0 - 2M}{2(R_{\oplus} + h_p)} = -\frac{M}{2a} \quad \rightarrow \quad a = M \frac{(R_{\oplus} + h_p)}{2M - M_0} = 5,6 R_{\oplus} = 3,57 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Hogyan fejezhető ki h_a ? Érdemes felrajzolni egy ábrát egy elnyúlt ellipszis pályáról, fókuszpontjában a kiterjedéssel bíró Földdel. Az ellipszis hosszanti tengelye $2a$ hosszúságnak felel meg, mely: $2a = h_p + 2R_{\oplus} + h_a$. Innen:

$$h_a = 2a - 2R_{\oplus} - h_p = \mathbf{58\,208\,km} \approx 9,1 R_{\oplus}$$

d) A határsebesség a második kozmikus sebesség:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Az eredeti sebesség a fentebb már felírt v_0 volt. Ehhez képest a második kozmikus sebesség eléréséhez szükséges tömegváltozás utáni M' tömeggel felírva ugyanez a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2GM'}{(R_{\oplus} + h_p)}} = \sqrt{\frac{GM_0}{(R_{\oplus} + h_p)}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{M_0} = \sqrt{2M'} \quad \Rightarrow \quad M' = \frac{1}{2}M_0$$

Azaz **ha legalább a felére csökkenne a bolygó tömege**, az űrhajó elszakadna.