

Athletica Galactica csillagászati szakkör

tanári segédlet és példatár 2025

3. Csillagászati távolságmérés

Kulcsszavak: A távolság mértékegységei a csillagászatban, a csillagászati egység, fényév, a parallaxis és parszek fogalma. Csillagok térbeli mozgása, radiális- és tangenciális komponensek, sajátmozgás.

1. Szükséges fizikai ismeretek

- Szögmértékek: fok, szögperc, szögmásodperc, radián
- Látszólagos szögátmérő fogalma és kiszámítása
- Vektor felbontása két komponensre
- Szögfüggvények

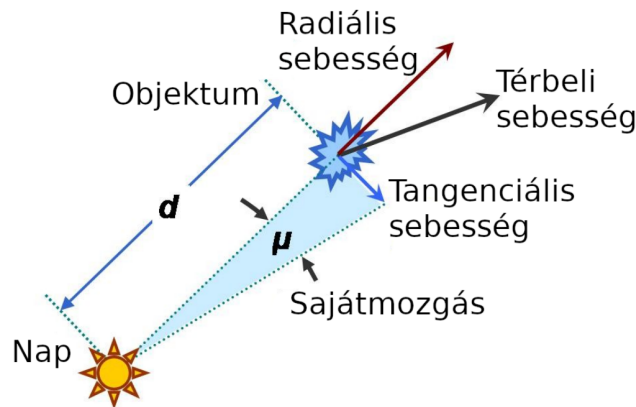
2. Kapcsolódó csillagászati ismeretek

- **Csillagászati Egység:** A Nemzetközi Csillagászati Unió által rögzített számérték: $1 \text{ CSE} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} \approx 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Ez lényegében a Föld és Nap közötti átlagos távolság.
- **Parallaxis:** Az égitestek látszó elmozdulása az égbolton a Föld Nap körüli keringéséből kifolyólag. A parallaxis szög a Föld pályájának sugara (félnagy tengelye, $a = 1 \text{ CSE}$) által bezárt szög a csillagnál.
- **Parszek:** Az a távolság, ahonnan nézve az 1 CSE 1 ívmásodperc szög alatt látszik.
- **Fényév:** Az a távolság, amelyet a fény vákuumban egy év alatt megtesz. Angolul *light year*, emiatt szokás ly mértékegységként jelölni: $1 \text{ ly} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 63,24 \text{ CSE} = 0,31 \text{ pc}$. A parszek tehát egy nagyobb egység, mint a fényév: $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly}$.
- **Radiális és tangenciális sebességkomponensek:** Az égitestek térbeli sebessége egy vektor, mely rendelkezik valamekkora nagysággal és iránnyal. Ha ezt a mozgást egy megfigyelőhöz vonatkoztatjuk, akkor ez a vektor felbontható két komponensre. A csillagok látóirányú sebességét radiális sebességnek nevezzük, míg a látóirányra merőleges komponens

tangenciális sebességnek. Ezek azért fontos fogalmak, mert a gyakorlatban ezeket a komponenseket tudjuk megmérni. Ha ismerjük a tangenciális (v_t) és radiális (v_r) sebességet, a csillag térbeli sebessége:

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2}$$

- **Sajátmozgás:** A csillagok látszólagos elmozdulása az égbolton. Ezt a μ sajátmozgást rendszerint ívmásodperc/év egységben adjuk meg, és a csillag tangenciális sebességével van összefüggésben.



2.1. Ajánlott fejezetek a *Bevezetés a csillagászatba* könyvből

4.5. Parallaxis és sajátmozgás

A 218-221. oldal között: *parallaxis, parszek, Gaia, sajátmozgás, tangenciális sebesség, radiális sebesség, Barnard-csillag*.

2.2. További ajánlott források

Csillagászati feladatok a középiskolai fizika fejezeteihez (Gróf Andrea):

http://fiztan.phd.elte.hu/files/kiadvanyok/Csillagaszati_feladatok.pdf

Parallaxis, avagy hogyan méri meg a Gaia űrtávcső a csillagok távolságát:

<https://www.youtube.com/watch?v=m1ZNSPrH0q8>

Parallaxis és sajátmozgás az égbolton:

<https://www.youtube.com/watch?v=a3pMkp0wX7I>

<https://www.youtube.com/watch?v=TXWuZSWtDPE>

Hogyan detektálhatunk asztrometriai módszerrel exobolygókat:

https://www.youtube.com/watch?v=4u_dVKKRoPw

3. Példatár

3.1. A híres váltószám

Számítsuk ki a parszek és a csillagászati egység közti váltószámot! Hány csillagászati egységnek felel meg egy parszek?

Megoldás

A parszek definíciójából kiindulva felírhatjuk az alábbi összefüggést:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ CSE}}{1''},$$

ahol a célunk az 1 parszek kifejezése csillagászati egységben.

Ehhez a szögmértéket dimenziótlantítani kell, azaz át kell váltani radiánba:

$$1'' = \frac{1}{3600} \text{ fok} = \frac{1}{3600} \text{ fok} \cdot \frac{\pi}{180} \frac{1}{\text{fok}} = \frac{\pi}{648000}$$

Innen adódik:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ CSE}}{1''} = 1 \cdot \frac{648\,000}{\pi} \text{ CSE} \approx 206\,265 \text{ CSE}$$

3.2. Regulus

A Regulus (α Leonis) az Oroszlán csillagkép legfényesebb csillaga, mely valójában egy négyes csillagrendszer, melynek fényességét a Regulus A dominálja. A rendszer parallaxisa $41,13 \pm 0,35$ mas. *Megjegyzés: a mas egység a milliarcsecond, azaz milliómásodperc rövidítése.*

- Mekkora a távolság parszekben, fényévben, csillagászati egységben és kilométerben?
Mekkora a távolság hibája parszekben?
- A Regulus A egy $4,15 M_{\odot}$ főkomponensből (Aa) és egy $0,31 M_{\odot}$ fehér törpéből (Ab) áll. Ebben a kettős rendszerben a keringési periódus $P = 40,1$ nap. Ha körpályán való keringést teszünk fel, mekkora szögtávolságra látszanak egymástól a Földről nézve?
- Látható tartományban mekkora távcsőre lenne szükség, hogy felbontsuk a rendszert?
- A Regulus Aa egy elképesztően gyorsan forgó csillag, a forgási periódusa 15,9 óra (összehasonlításképp, a Napé átlagosan 25 nap). Ennek következtében a csillag alakja erősen elnyúlt, ellipszoidális: $R_{\text{minor}} = 0,651$ mas és $R_{\text{major}} = 0,771$ mas. Mindezt a High Angular Resolution Astronomy (CHARA) látható és infravörös tartományban működő interferométerrel mérték meg a kaliforniai Mount Wilson obszervatóriumból. Mekkora bázisvonalat kellett használniuk a sikeres méréshez, ha azok $\lambda = 2,1501 \mu\text{m}$ -en készültek?

Megoldás

- a) A parallaxis definíciója szerint egy égitest távolsága megfeleltethető a parallaxisának reciprokával, ha parszek és ívmásodperc egységekben számolunk:

$$d^{[\text{pc}]} = \frac{1^{[\text{CSE}]}}{\pi^{[']}}$$

Először váltsuk át a parallaxist ívmásodpercbe: $\pi = 41,13 \text{ mas} = 0,04113''$

Behelyettesítve a fenti képletbe a távolságra adódik:

$$d = 24,313 \text{ pc} = 79,309 \text{ ly} = 5,015 \cdot 10^6 \text{ CSE} = 7,502 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

A hibát ki lehet számolni úgy, hogy hibán belül veszem a legkisebb és legnagyobb lehetséges parallaxist, majd kiszámolom az ezekhez tartozó távolságokat, és a névleges értékhez képesti különbségeket tüntetem fel: $d_{\min} = 24,108 \text{ pc}$ és $d_{\max} = 24,522 \text{ pc}$, azaz:

$$d = 24,313_{-0,205}^{+0,209} \text{ pc} = 24,31 \pm 0,21 \text{ pc}$$

Megjegyzés: mivel az eltérés az első tizedesjegyben van, ezért maximum a második tizedesjegyig adjuk meg mind az eredményt, mind annak hibáját!

Ebben az esetben a hiba jól közzétítható szimmetrikus hibával is. Azonban, mint ahogy a számolásból látható, alapvetően a távolság hibája aszimmetrikus, mivel a $d = 1/\pi$ nemlineáris függvény a távolságra nézve. Ez akkor válik jelentőssé, ha a relatív parallaxis hiba nagy: $\sigma_\pi/\pi > 0,1$. Jelen esetben $\sigma_\pi/\pi = 0,35/41,13 = 0,0085 \ll 0,1$.

- b) Kepler III. törvénye értelmében a rendszer félnagytengelye szoláris egységekkel:

$$a^{[\text{CSE}]} = \sqrt[3]{M_{\text{össz}} P^2} = \sqrt[3]{4,46 \text{ M}_\odot \cdot \left(\frac{40,1 \text{ nap}}{365,25 \text{ nap/év}} \right)^2} = 0,377 \text{ CSE}$$

A két csillag látszó szögtávolsága:

$$\theta = \arctan\left(\frac{a}{d}\right) = \arctan\left(\frac{0,377 \text{ CSE}}{24,313 \cdot 206\,265 \text{ CSE}}\right) = 7,518 \cdot 10^{-8}$$

Váltsuk át ezt egy szemléletesebb mértékegységbe, ívmásodpercbe:

$$7,518 \cdot 10^{-7} = 4,307 \cdot 10^{-6} \text{ fok} = 0,016''$$

- c) Egy távcső felbontóképessége függ az eszköz fénygyűjtő képességétől (például a D tükrő-átmérőtől) és az észlelés λ hullámhosszától:

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Mivel a kérdés a látható tartományról szól, vegyük annak nagyjából a központi hullámhosszát: $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$. Mindig tüntessük fel, hogy mit használunk! A szükséges átmérő a felbontáshoz:

$$D = 1,22 \frac{\lambda_0}{\theta} = 1,22 \frac{500 \text{ nm}}{7,518 \cdot 10^{-8}} = 8,114 \text{ m}$$

- d) Ha a CHARA képes volt megmérni a csillag legkisebb és legnagyobb keresztmetszetének sugarát, az azt jelenti, hogy a felbontása legalább megegyezett azzal az értékkel, amivel az R_{minor} távolság még éppen felbontható. Az ehhez szükséges konfiguráció bázisvonala:

$$D = 1,22 \frac{\lambda}{R_{\text{minor}}} = 1,22 \cdot \frac{2,1501 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{3,16 \cdot 10^{-9}} = 831 \text{ m}$$

Megjegyzés: a fenti érték csupán egy nagyságrendi közelítés. Valójában a CHARA összesen hat darab 1-méteres távcső hálózatából áll, melyeket egy speciális "Y" alakba rendeznek, 15-féle különböző konfigurációban, 34 és 331 m közötti bázisvonalakat elérve. Interferometriánál egyébként akár el is lehet hagyni az 1,22-es szorzót, és csak a λ/B -vel számolni.

3.3. Szíriusz

A Szíriusz az éjszakai égboltunk legfényesebb csillaga. Parallaxisa $0,37''$, míg a Naptól mért távolsága 8 km-rel csökken másodpercenként.

- a) Mekkora a v_t tangenciális sebessége km/s-ban kifejezve, ha az évi sajátmozgása $1,315''$?
Állítsunk fel egy összefüggést a v_t , μ és a csillag d távolsága között, ha rendre km/s, $''/\text{év}$ és parszek egységeket használunk!
- b) Mekkora a térbeli sebessége km/s-ban kifejezve?

Megoldás

- a) A μ a csillag szögsebességét adja meg az égbolton, melyet a távolsággal megszorozva megkapjuk a látóirányra merőleges sebességet:

$$v_t = \mu \cdot d$$

Induljunk ki abból, hogy ezek mind SI mértékegységekben vannak, úgyhogy váltsuk át őket a csillagászatban hasznosabb egységekre:

$$v_{[\text{km/s}]} = \frac{v_{[\text{m/s}]}}{1000} \implies v_{[\text{m/s}]} = 1000 \cdot v_{[\text{km/s}]}$$

Továbbá:

$$\mu_{[''/\text{yr}]} = \mu_{[1/\text{s}]} \cdot \frac{1 \text{ yr}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ rad}}{1 ''} = \mu_{[1/\text{s}]} \cdot 6,509 \cdot 10^{12} \implies \mu_{[1/\text{s}]} = \frac{\mu_{[''/\text{yr}]}}{6,509 \cdot 10^{12}}$$

Végül:

$$d_{[\text{pc}]} = \frac{d_{[\text{m}]}}{3,086 \cdot 10^{16}} \implies d_{[\text{m}]} = 3,086 \cdot 10^{16} \cdot d_{[\text{pc}]}$$

Vagyis km/s, ''/yr és pc egységekben a kiindulási képlet:

$$v_t = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{6,509 \cdot 10^{12}} \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \mu d = 4,74 \cdot \mu d$$

A tangenciális sebességre tehát adódik:

$$v_t = 4,74 \cdot \mu d = 16,8 \text{ km/s}$$

b) A feladat szövegéből látszik, hogy a radiális sebesség: $v_r = +8 \text{ km/s}$.

A térbeli sebesség a két sebességkomponensből Pitagorasz-tétellel számolható:

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = 18,65 \text{ km/s}$$

3.4. Barnard-csillag

A Barnard-csillagot 2004-ben és 2014-ben is észleljük, és azt tapasztaljuk, hogy a pozíciója 51,5''-cel megváltozott. Mennyi idő múlva lesz a Barnard-csillag a Naprendszerhez a legközelebb, és ekkor mekkora lesz a távolsága?

A Barnard csillag parallaxisa 545,4 mas, radiális sebessége $-110,6 \text{ km/s}$.

A gravitációs kölcsönhatást hanyagoljuk el, és tegyük fel, hogy a Barnard csillag a Naprendszerből nézve egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Megoldás

A parallaxis: $\pi = 545,4 \text{ mas} = 0,5454''$.

Ebből a távolság: $d = 1/\pi = 1,834 \text{ pc}$.

A csillag sajátmozgása az alapján, hogy 10 év alatt 51,5''-et mozdult el az égbolton: $\mu = 5,15''/\text{év}$.

Ahhoz, hogy a legnagyobb közelség mértékét és időpontját meg tudjuk határozni, ismernünk kell a csillag térbeli mozgását: i) mekkora térbeli sebességgel mozog ii) és hozzánk képest milyen irányban.

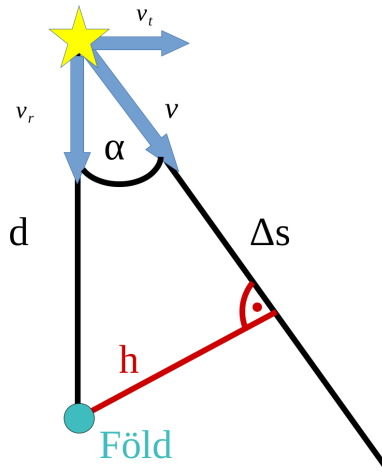
Mivel a radiális sebesség ismert, a csillag térbeli sebességének meghatározásához számítsuk ki a csillag tangenciális sebességét!

$$v_t = 4,74 \cdot \mu d = 44,77 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A csillag v eredő (térbeli) sebessége:

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = 119,32 \text{ km/s}$$

A továbbiakhoz rajzoljunk fel egy ábrát, ami megjeleníti a helyzetet, és definiálja a szükséges változókat!



A keresett h legközelebbi távolság:

$$h = d \sin \alpha = d \cdot \frac{v_t}{v} = 0,69 \text{ pc}$$

A legnagyobb közelség elérése szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{d \cos \alpha}{v} = \frac{d \cdot \frac{v_r}{v}}{v} = \frac{d \cdot v_r}{v^2} = 4,4 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

Azaz a Barnard-csillag **14 ezer év** múlva ér **0,69 parszekes** közelségbe a Naphoz, mely a legkisebb elérhető távolság lesz a két csillag között.