

KÉPLETGYŰJTEMÉNY

a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiához
és az Athletica Galactica Kárpát-medencei Csillagászati
és Asztrofizikai Versenyhez

Vári Gergely Péter



2025. október 15.

Használati útmutató

Egy olyan Képletgyűjteményt tart a kezében a Kedves Olvasó, amely tartalmazza mindazon összefüggéseket, melyek valaha előkerültek, vagy hasznosnak bizonyultak a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia (IOAA), valamint annak hazai válogatóversenye, az *Athletica Galactica* Kárpát-medencei Középiskolai Csillagászati és Asztrofizikai Verseny (röviden *Athletica Galactica*) feladatainak megoldása során.

A hazai válogatóverseny tananyaga három fő szakaszra osztható. Ennek megfelelően a Képletgyűjteményben minden összefüggés mellett egy-egy színjelölés található, amely az adott ismeret szintjét mutatja:

	Az <i>Athletica Galactica</i> sillabusza alapján annak első három, válogató fordulójához szükséges ismeretek.
	Az <i>Athletica Galactica</i> sillabusza alapján annak döntő fordulójára szükséges ismeretek.
	Az IOAA sillabusza alapján annak bármely fordulóján számon kérhető, illetve a hazai keretfelkészítés anyagát képző ismeretek.

Bízunk benne, hogy a Képletgyűjtemény hasznos útmutatóul szolgál majd a versenyre való felkészülés bármely szintje során, és hozzájárul ahhoz, hogy az Olvasó magabiztosabban és rendszerezettebben tájékozódjon a csillagászati és asztrofizikai ismeretek között.

Sajnos a leg gondosabb ellenőrzések mellett is kerülhetnek hibák az *Athletica Galactica* weboldalán közzétett dokumentumba, amelyekért a felelősség egyedül a szerzőt terheli. Kérem, ha valaki hibákat talál a Képletgyűjteményben, a geba1114@gmail.com címen jelezze a szerzőnek, hogy azt mihamarabb javíthassuk és felvehessük a hibajegyzékbe.

Copyright © 2025 HUN-REN Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont
Minden jog fenntartva. Hasznoszerzés céljából nem terjeszthető és másolható.

Idegen nyelvre a szerző írásos engedélye nélkül nem lefordítható, azon nem terjeszthető és másolható.

Unauthorized translation, reproduction, or distribution of this material in any language is strictly prohibited without written consent from the author.

Tartalomjegyzék

1. Égi mechanika	3
1.1. Egycentrum-probléma	3
1.2. Ellipszis tulajdonságai	4
1.3. Pályaelemek	5
1.4. Hiperbolapályák	5
1.5. Parabolapályák	6
1.6. Pályák polárszöges paraméterezése	6
1.7. Kéttest-probléma	7
1.8. Korlátozott háromtest-probléma	9
1.9. Egyéb összefüggések	9
2. Asztrofizika	11
2.1. Fotonok és részecskék	11
2.2. Sugárzástani alapfogalmak	12
2.3. Feketetest-sugárzás	13
2.4. Magnitúdóskála	13
2.5. Extinkció	14
2.6. Bolygók és csillagok	15
2.7. Kettőscsillagok és tranzitok	15
3. Optika	16
3.1. Alapvető összefüggések	16
3.2. Távcsőtípusok	18
3.3. Távcsövek leképezési hibái	18
3.4. Irányok a távcsőben	19
3.5. CCD detektorok	20
4. Szférikus csillagászat	21
4.1. Alapvető összefüggések	21
4.2. Koordináta-rendszerek	21
4.3. Gömbháromszögtan	23
4.4. Időszámítás	23
4.5. Egyéb összefüggések	25
5. Kozmológia	26
5.1. Alapvető összefüggések	26
5.2. Kozmológiai távolságok	27
6. Távolságmérés	28
6.1. Távolságegységek	28
6.2. Távolságmérési módszerek	28
7. Adatelemzés	30
7.1. Statisztikai mutatók	30
7.2. Hibaterjedés	31
7.3. Nemlineáris függvények transzformációja lineáris függvénné	31
7.4. Diagramok	31
7.4.1. Minek kell szerepelnie egy grafikonon?	31
7.4.2. Általános tanácsok grafikonszítéshez	32

7.4.3. Diagramtípusok	33
8. Észlelési és planetáriumi segédlet	35
8.1. Időszámítás	35
8.2. Csillagtérképek	35
8.3. Távcsoves észlelés	35
8.4. Hasznos szférikus csillagászati összefüggések	36
8.5. Holdészlelés	37
9. Alapvető fizikai összefüggések	38
9.1. Körmozgás, forgómozgás, energia	38
9.2. Atomfizika	38
9.3. Termodinamika	39
9.4. Speciális relativitáselmélet (1D)	39
9.5. Elektromágnesség	40
9.6. Egyéb összefüggések	40
10. Matematikai alapok	41
10.1. Közelítések	41
10.2. Koordinátageometria	41
10.3. Geometriai alapok	42
10.4. Trigonometria	42
10.5. Sorozatok	42
10.6. Differenciálszámítás	43
10.6.1. Deriválási szabályok	43
10.6.2. Alapvető deriváltak	43
10.6.3. Alapvető integrálok	43
10.7. Numerikus egyenletmegoldási módszerek	44
10.8. Vektorok	45
10.8.1. Vektorműveletek geometriai úton	45
10.8.2. Vektorműveletek reprezentációja	46
10.8.3. Descartes-féle és polárkoordináta-rendszerek	47

1. Égi mechanika

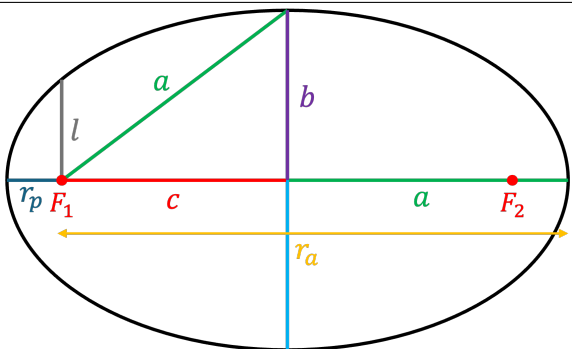
1.1. Egycentrum-probléma

A két tömegpont egyikét nyugvónak tekintjük, s a másik pont mozgását vizsgáljuk ezen pont körül. $m \ll M$ esetben jó közelítés.

Gravitációs erőtvény	$F_g = \frac{GMm}{r^2}$
Gravitációs erőtvény, vektoriális alak	$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
Gravitációs gyorsulás	$g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{r^2}$
Gravitációs potenciális energia	$U = -\frac{GMm}{r}$
Körpálya sebessége (I. kozmikus sebesség)	$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Szökési sebesség (II. kozmikus sebesség)	$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_I$
Pillanatnyi sebesség ellipszispályán	$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$
Ellipszispályán mozgó test összenergiája	$E_{\text{össz}} = -\frac{GMm}{2a}$
Energiamegmaradás	$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{konstans} = -\frac{GMm}{2a}$
Kepler I., eredeti alak	A bolygók olyan ellipszispályán keringenek, amelyek egyik fókuszpontjában a Nap áll.
Kepler II., eredeti alak	A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár azonos idők alatt azonos területet sírol.
Kepler III., eredeti alak	A bolygók Nap körüli pályájának a fél nagytengelye és P keringési periódusa között a következő összefüggés áll fenn: $\frac{a^3}{P^2} = \text{konstans} = \frac{GM}{4\pi^2}$
Kepler III. szoláris egységekkel	$\frac{a_{[\text{CSE}] }^3}{P_{[\text{yr}]}^2} = M_{[\text{M}_\odot]}$
Viriáltétel	$-2\langle K \rangle = \langle U \rangle$
Gravitációs kötési energia (potenciális energia)	A minimális energia, amelynek abszolút értékét egy rendszerhez kell adni, hogy megszűnjön gravitációsan kötött rendszer lenni. Homogén sűrűségeloszlású gömb esetén: $U = -\frac{3GM^2}{5R}$
Perdületmegmaradás	$L = mrv_\perp = \text{konstans}$ Nem csak a perdületvektor hossza marad meg, hanem az iránya is $\implies$ síkpálya

Égitest perdülete	$L = m\sqrt{GMl} \stackrel{\text{ellipszisre}}{=} m\sqrt{GMa(1-e^2)}$
Pályaenergiák	• Ellipszis: $E = -\frac{GMm}{2a}$ • Parabola: $E = 0$ • Hiperbola: $E = +\frac{GMm}{2a}$
Sziderikus és szinodikus keringési idő	• Sziderikus: valós keringési idő, állócsillagokhoz képesti elmozdulás alapján. • Szinodikus: két azonos bolygóhelyzet között eltelt idő. • Prográd keringésre: $\frac{1}{T_{\text{szin}}} = \frac{1}{T_{\text{belső}}} - \frac{1}{T_{\text{külső}}}$ • Retrográd keringésre: $\frac{1}{T_{\text{szin}}} = \frac{1}{T_{\text{belső}}} + \frac{1}{T_{\text{külső}}}$

1.2. Ellipszis tulajdonságai

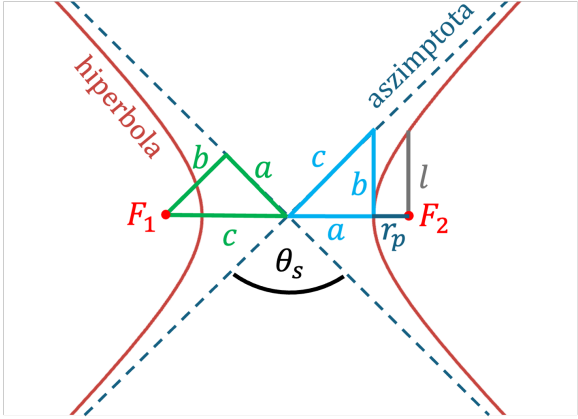
Ellipszis pályaelemi	 a: fél nagytengely, b: fél kistengely, c: lineáris excentricitás, l: semi-latus rectum, r_p: pericentrum-távolság, r_a: apocentrum-távolság, $F_{1,2}$: fókuszpontok
Ellipszis excentricitása	$e \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$
Ellipszis területe	$A = ab\pi$
Pericentrum, apocentrum távolsága	$r_p = a(1 - e)$ $r_a = a(1 + e)$
Egyéb összefüggések	$a^2 = b^2 + c^2$ $b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{r_a r_p}$ $c = \frac{r_a - r_p}{2}$

Semi-latus rectum (l)	$l = a(1 - e^2)$
Peri- és apocentrum-távolság átlaga	$\frac{r_p + r_a}{2} = a$

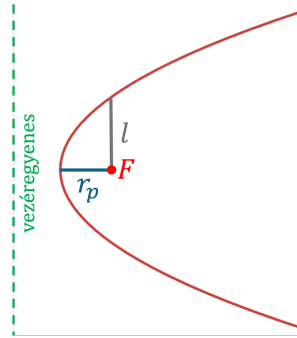
1.3. Pályaelemek

a - Fél nagytengely	A pálya fél nagytengelye
e - Excentricitás	A pálya elnyúltsága
i - Inklináció	A pályasík és a látóirány által bezárt szög
ω - Pericentrum argumentuma	A pályasíkban a felszálló csomótól a pericentrumig, pozitív irányban mért szög
Ω - Felszálló csomó hossza	Az alapsíkban az alapiránytól (ált. a tavaszpont) a felszálló csomóig, pozitív irányban mért szög
τ - Pericentrum-átmenet	A keringő test (egyik) pericentrum-átmenetének időpontja

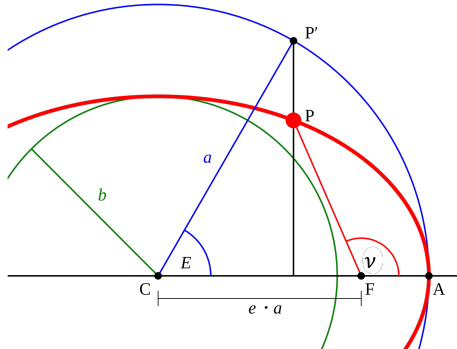
1.4. Hiperbolapályák

Hiperbola pályaelemei	 a: fél nagytengely, b: impakt paraméter, c: lineáris excentricitás, l: semi-latus rectum, θ_s: szóródási szög, $F_{1,2}$: fókuszpontok
Hiperbolapálya energia- és perdületmegmaradása	$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{konstans}$ $L = mbv_\infty = mrv_\perp = m\sqrt{GMa(e^2 - 1)} = m\sqrt{GMl}$
Általános sebességeképlet	$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$
Egyéb összefüggések	$c = ae \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad l = a(e^2 - 1)$ $a^2 + b^2 = c^2 \quad r_p = a(e - 1)$

1.5. Parabolapályák

Parabola pályaelemei	 l: semi-latus rectum, F: fókuszpont
Parabolapálya energia- és perdületmegmaradása	$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$ $L = mr_p v_p = mrv_{\perp} = m\sqrt{2GM r_p} = m\sqrt{GMl}$
Általános sebességképlet	$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

1.6. Pályák polárszöges paraméterezése

Anomáliák	Szögek, amelyek paraméterezik, hogy egy objektum hol jár a pályáján. Mindegyiket a pericentrumtól mérjük, a keringés irányában. • Valódi anomália (ν): szög a pályán a fókuszpontból nézve • Excentrikus anomália (E): az objektum helyzetét a nagytengelyre merőlegesen vetítjük az ellipszis köré írt körre, a helyzetét a középpontból mérjük • Középanomália (M): ha az objektum a köréírt körpályán keringene, ennyi lenne E; $M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau)$
	 ν: valódi anomália, P: valódi helyzet, P': vetített helyzet

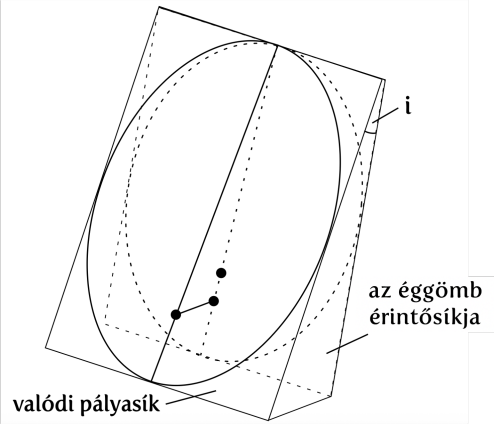
Kepler-egyenlet (ellipszispálya időfüggése)	$M = E - e \sin E = \frac{2\pi}{P}(t - \tau)$ M: középanomália, E: excentrikus anomália, τ: legutóbbi pericentrum-átmenet időpontja
Anomáliák közötti összefüggés	$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$
Pillanatnyi koordináták	$x = a(\cos E - e)$ $y = b \sin E$
Pálya egyenlete polárkoordinátákkal	$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} = a(1-e \cos E)$
Merőleges sebesség	$v_{\perp} = \frac{GMm}{L}(1+e \cos \nu)$
Radiális sebesség	$v_{\parallel} = \frac{GMm}{L}(e \sin \nu)$

1.7. Kéttest-probléma

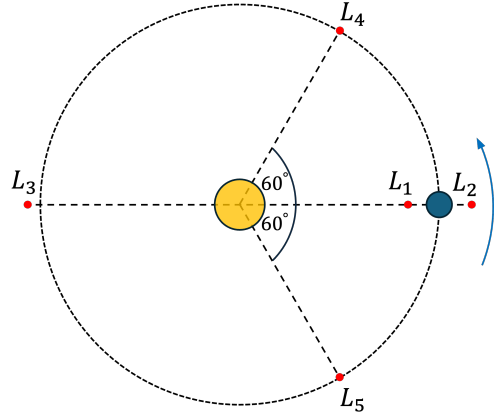
Az egycentrum-problémával ellentétben nincs rögzített tömegpont, mindkettő szabadon mozog.

Jelöléskonvenció: jelölje K_{TKP} a tömegközépponti inerciarendszert, K' pedig az egyik (a szimmetria miatt tetszőlegesen megválasztható) komponens vonatkoztatási rendszerét. Jelölje r_i , v_i , a_i stb. ($i \in \{1, 2\}$), az egyes testek a tömegközépponthoz viszonyított mennyiségeit, r , v , a stb. pedig a relatív (K' -ből tekintett) mennyiségeket.

Redukált tömeg (μ) és össztömeg (M_{Σ})	$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M_{\Sigma} \equiv m_1 + m_2$
Redukált kéttestprobléma	A kéttestprobléma K'-be áttérve egy analóg egycentrumproblémára redukálódik, amelyben egy rögzített M_{Σ} körül μ tömeg kering. Az analógia K' relatív pozícióit, sebességeit stb. adja meg, valamint a kéttest-rendszer K_{TKP}-ban vett energiáját és perdületét.
Kepler I. kettősökre	K_{TKP}-ban: a két komponens megegyező excentricitású ($e_1 = e_2$), kúpszelet alakú pályákon kering, a TKP mindkettőnek egyik fókuszpontja. K'-ben: a másik test a két komponenssel megegyező excentricitású ($e = e_1 = e_2$), kúpszelet alakú pályán kering, melyen a hossz- és sebesség-jellegű mennyiségek összeadódnak, pl. $r = r_1 + r_2$, $a = a_1 + a_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_r = v_{1,r} + v_{2,r}$ stb.
Kepler II. kettősökre	K_{TKP}-ben: a tömegközépponttól a bármely komponenshez húzott vezérsugár azonos idők alatt azonos területet sűrol. K'-ben: a másik komponenshez húzott vezérsugár azonos idők alatt azonos területet sűrol.

Kepler III. kettősökre	$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_\Sigma}{4\pi^2}$
Kettősök tömeg-, távolság-, sebesség- és félnagy tengely-arányai (K_{TKP})	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{a_2}{a_1}$
Testek távolsága a tömegközépponttól	$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot r$
Energiamegmaradás (K_{TKP})	$E_{\text{TKP}} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM_\Sigma\mu}{r} = \text{konstans} \stackrel{\text{ellipszisre}}{=} -\frac{GM_\Sigma\mu}{2a}$ Hiperbolapályákra $a \leftrightarrow -a$ konvencióval, parabolapályákra $a \rightarrow \infty$ konvencióval érvényes.
Perdületmegmaradás (K_{TKP})	$L_{\text{TKP}} = \mu r v_\perp = \text{konstans} =$ $= \mu \sqrt{GM_\Sigma l} \stackrel{\text{ellipszisre}}{=} \mu \sqrt{GM_\Sigma a(1 - e^2)}$
Pillanatnyi sebesség kettősöknél (K')	$v = \sqrt{GM_\Sigma \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$ a-ra az energiamegmaradás előjelkonvenciója érvényes.
Kettős inklinációja	A pályasík normálisa és a látóirány által bezárt szög. • Látóirányra merőleges pályasík esetén $i = 0^\circ$ • Látóirányba eső pályasík esetén $i = 90^\circ$ • Retrográd keringésre $90^\circ < i \leq 180^\circ$ 
Mért radiális sebesség-amplitúdó	$v_{r,\text{max}} = v_0 \sin i$ v_0: valódi térbeli sebesség Kizárólag körpályára igaz
Radiális sebesség előjelkonvenciója	Pozitív: a megfigyelőtől távolodik. Negatív: a megfigyelőhöz közeledik.

1.8. Korlátozott háromtest-probléma

Lagrange-pontok	Azon pontok a térben, amelyekben egy kis test két, egymás körül keringő nagyobb test gravitációs vonzásának hatására azokhoz képest nyugalomban maradhat egy együttforgó koordináta-rendszerben. 
L_1 és L_2 pontok távolsága a kisebb testtől	$L_{1,2} = a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$ Az a távolság, amelyen belül stabilan keringhet egy hold adott égitest körül (Hill-szféra)
L_3 pont távolsága a nagyobb testtől	$L_3 = a \left(1 + \frac{7}{12} \frac{m}{M} \right)$
L_4 és L_5 pont távolsága a kisebb és nagyobb testtől	$L_{4,5} = a$

1.9. Egyéb összefüggések

Felületi sebesség Kepler II-höz	$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = \frac{\sqrt{GMl}}{2} \stackrel{\text{ellipszisre}}{=} \frac{A_{\text{ellipszis}}}{P}$ Egycentrum-probléma esetén igaz
Merőleges sebesség	$v_{\perp} = \mu d$ $v_{\perp}^{[\text{km/s}]} = 4,74 \mu^{[''/\text{yr}]} d^{[\text{pc}]}$
Térbeli sebesség	$v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$
Sajátmozgás	$\mu = \sqrt{\mu_{\delta}^2 + \mu_{\alpha}^2 \cos^2 \delta}$ $\mu_{\delta} \equiv \frac{\Delta \delta}{\Delta t} \quad \mu_{\alpha} \equiv \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ Egy állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszerben.
Ciolkovszkij-rakétaegyenlet	$\Delta v = v_g \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right)$ $v_{\text{fin}} = v_g \ln \left(\frac{m_0}{m_{\text{fin}}} \right)$

Longitudinális árapályerő okozta gyorsulás	$\mathbf{a} = \frac{2GMR}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$ M: árapályhatást kifejtő égitest tömege, R: árapályhatást elszenvedő égitest sugara, r: a két égitest távolsága Az árapályhatást elszenvedő égitest középpontjától elfelé mutat.
Roche-határ	Azon távolság, amelyen belül egy gravitációsan stabil objektum (hold) szétszakad egy másik test (bolygó) árapályereje miatt. Nem forgó rendszerre: $d_R = R_{\text{bolygó}} \sqrt[3]{\frac{2\rho_{\text{bolygó}}}{\rho_{\text{hold}}}} = r_{\text{hold}} \sqrt[3]{\frac{2M_{\text{bolygó}}}{m_{\text{hold}}}}$ Kötött tengelyforgásra: $d_R = R_{\text{bolygó}} \sqrt[3]{\frac{3\rho_{\text{bolygó}}}{\rho_{\text{hold}}}} = r_{\text{hold}} \sqrt[3]{\frac{3M_{\text{bolygó}}}{m_{\text{hold}}}}$
Kis változás a periódusidőben vagy fél nagytengelyben	$\frac{\Delta P}{P} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}$ Feltéve, hogy a központi égitest tömege nem változik.
Gravitációs Gauss-törvény	$\oiint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G M_{\text{in}}$ Egy zárt felületen kimenő gravitációs fluxus, amely kizárólag a zárt felületen belül található tömegtől függ.

2. Asztrofizika

2.1. Fotonok és részecskék

Foton energiája	$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ ν: frekvencia, λ: hullámhossz
Foton lendülete	$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$
Sugárnyomás	$\Delta p = \frac{\Delta E_{\text{be}}}{c} = \frac{F A \Delta t}{c} \Rightarrow F_{\text{rad}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{F A}{c}$ A: test homlokfelülete, F: adott helyen mérhető fluxus Ha a beérkező foton visszaverődik, $F_{\text{rad}} = 2 \cdot \frac{F A}{c}$ Az összefüggés csak merőleges beesés esetén igaz. Ha a foton lendületvektorának és a felület normálvektorának bezárt szöge θ, a fenti összefüggés egy $\cos^2 \theta$ tényezővel skálázódik.
Vöröseltolódás	$z \equiv \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{\nu_{\text{em}} - \nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{obs}}}$
Doppler-effektus	Klasszikus közelítés ($v \ll c$): $z \approx \frac{v_r}{c}$ Relativisztikus esetben: $1 + z = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}}, \quad v_r = c \cdot \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1}$ v_r: radiális sebességkomponens, távolodás esetén pozitív A Doppler-effektus <i>térbeli</i> mozgásokra érvényes, ezért pl. kozmológiai vöröseltolódásra nem alkalmazható. A klasszikus képlet a relativisztikus jó közelítése $v_r < 0,1 \cdot c$ esetben. A fenti relativisztikus képlet c-hez közeli tangenciális sebességek esetén csak közelítőleg igaz.
Vonalszélesség	$v_{\text{rot,r,max}}/c = \frac{W}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}$ W: vonalszélesség, a forgás miatt kiszélesedett színeképvonal félértékszélessége
Beérkezési ráta	$\phi = \frac{F}{E_\gamma}$ $[\phi] = \text{s}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Gravitációs vöröseltolódás	$1 + z = \left(1 - \frac{R_{\text{Sch}}}{R_e}\right)^{-1/2}$ R_e: foton kibocsátásának távolsága az objektum középpontjától

2.2. Sugárzástani alapfogalmak

Luminozitás	Egy objektum teljes kisugárzott teljesítménye. $L = \frac{\Delta E_{\text{kibocsátott}}}{\Delta t}, \quad [L] = 1 \text{ W}$
Fluxus(sűrűség)	Egységnyi felületen (minden irányban) átáramló teljesítmény. $F = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A}, \quad [F] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ Példák: - Egy forrásról mekkora teljesítmény érkezik be felületegységenként a távcsövünkhöz. - Egy forrás felülete felületegységenként mekkora teljesítményt sugároz ki.
Intenzitás	Egységnyi, adott irányra merőleges felületen, az irány körüli egységnyi térszögbe kiáramló teljesítmény. $I = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A_{\perp} \Delta \Omega}, \quad [I] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ sr}}$ Példák: - Egy forrás egységnyi térszögről érkező fluxus. - Egy forrás által egységnyi térszögbe kibocsátott fluxus.
Monokromatikus/spektrális fluxus(sűrűség)/spektrális irradiancia	Egységnyi felületen és egységnyi frekvencia- vagy hullámhossztartományban (minden irányban) kiáramló teljesítmény. $S_{\nu} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A \Delta \nu}, \quad [S_{\nu}] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ Hz}},$ $S_{\lambda} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A \Delta \lambda}, \quad [S_{\lambda}] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ nm}}.$
Monokromatikus/spektrális intenzitás/spektrális radiancia	Egységnyi frekvencia- vagy hullámhossztartományra vonatkoztatott intenzitás. $I_{\nu} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A_{\perp} \Delta \Omega \Delta \nu}, \quad [I_{\nu}] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ sr Hz}},$ $I_{\lambda} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A_{\perp} \Delta \Omega \Delta \lambda}, \quad [I_{\lambda}] = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ sr nm}}.$
Jansky	$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
Térszög	$\Omega = \frac{A}{r^2} = 2\pi(1 - \cos \rho)$ ρ: fél nyílásszög Ha ρ kicsi, $\Omega \approx \rho^2 \pi$

2.3. Feketetest-sugárzás

Stefan–Boltzmann-törvény	$L = \varepsilon \sigma A T^4 \stackrel{\text{gömbre}}{=} \varepsilon 4\pi R^2 \sigma T^4$ ε : emisszivitás (abszoltút fekete testre $\varepsilon = 1$) Infravörös tartományban bolygókra $\varepsilon \approx 1$. Optikai és NIR tartományban csillagokra $\varepsilon \approx 1$.
Albedó	$\alpha_\lambda = 1 - \varepsilon_\lambda$ A beérkező fény mekkora részét veri vissza az objektum. Az összefüggés csak adott hullámhosszon igaz.
Fluxus és napállandó	$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad S_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d^2}$
Wien-törvény	$\lambda_{\max} T = b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Planck-törvény	$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$ $[B_\nu] \neq [B_\lambda]$, átváltáshoz $B_\lambda = B_\nu \cdot \frac{c}{\lambda^2}$ és $c = \lambda\nu$ Feketetest-sugárzás esetén $B_\nu = I_\nu$ és $B_\lambda = I_\lambda$
Wien-féle közelítés	$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$ Kis hullámhosszakra érvényes.
Rayleigh–Jeans-közelítés	$B_\nu = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2}$ Nagy hullámhosszakra (pl. rádiótartomány) érvényes.
Spektrális irradiancia	$S_\nu = B_\nu \pi \quad S_\lambda = B_\lambda \pi$ Izotrop módon sugárzó felületelemre igaz.
Fluxus számítása monokromatikus fluxusból	$F = S_\lambda \Delta\lambda = S_\nu \Delta\nu$ $\Delta\lambda, \Delta\nu$: sáv szélesség

2.4. Magnitúdóskála

Magnitúdóskála	$m = -2,5 \log_{10}(F) + \text{konstans}$ $F^{[\text{W/m}^2]}$: objektumról beérkező fluxus m és F lehet egy adott színsávbeli vagy bolometrikus.
Pogson-képlet (látszó magnitúdók különbsége)	$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$
Additív Pogson-képlet	$m_{\text{tot}} = -2,5 \log_{10} \left(\sum_i 10^{-0,4 m_i} \right)$
Színindex	Két (szomszédos) szűrőben mért fényesség különbsége. Például: $m_B - m_V \equiv (B - V)$

Abszolút fényességek különbsége	$M_1 - M_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L_1}{L_2} \right)$ M és L lehet egy adott színsávbeli vagy bolometrikus.
Bolometrikus korrekció	$M_{\text{bol}} = M_x \pm BC_x$ M_{bol} : a teljes hullámhossz-tartományban mért fényesség M_x : adott szűrőben mért abszolút fényesség Ha BC_x pozitív, a negatív előjelet válasszuk. A lényeg, hogy számértékben $M_{\text{bol}} < M_x$.
Távolságmodulus	$m - M \equiv \mu = -5 + 5 \log_{10} d^{[\text{pc}]}$
Felületi fényesség	$S = m + 2,5 \log_{10} A^{[r^2]}$

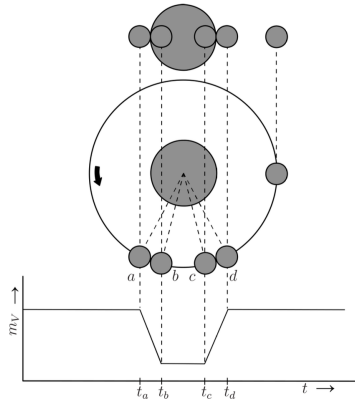
2.5. Extinkció

Extinkció (fényelnyelés, fényszóródás)	$A_x = \Delta m_x = a_x d$ a_x : tipikus extinkció, általában $[a_x] = \frac{\text{mag}}{\text{kpc}}$
Észlelt fényesség	$m_{\text{obs}} = m_0 + A$ m_0 : csillag látszó fényessége extinkció hiányában
Számsűrűség	$n = \frac{\rho}{m_{\text{részecske}}} = \frac{N}{V}$
Közepes szabad úthossz	$\bar{l} = \frac{1}{n\sigma}$ σ : hatáskeresztmetszet
Optikai mélység (τ)	$I = I_0 e^{-\tau}$ $m_{\text{obs}} - m_0 \equiv A = -2,5 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = \tau \cdot 2,5 \log_{10} e$
Színexcesszus	$E_{B-V} = (B - V)_{\text{obs}} - (B - V)_0 = A_B - A_V$
Észlelt színindex	$(B - V)_{\text{obs}} = (B_0 + a_B d) - (V_0 + a_V d) = (B - V)_0 + (a_B - a_V) d$
Vörösödés	$R_V = \frac{A_V}{A_B - A_V} = \frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,2$
Távolságmodulus extinkcióval	$m_{\text{obs}} - M = -5 + 5 \log_{10} d^{[\text{pc}]} + A$
Légtömeg	$X = \frac{1}{\cos z} = \sec z$ 60°-nál kisebb zenittávolságokra érvényes
Légköri extinkció	$m_{\text{obs}} = m_0 + k_\lambda X = m_0 + (\tau \cdot 2,5 \log_{10} e) X$ m_0 : légkörön kívül mért fényesség, k_λ : extinkciós együttható, X : légtömeg

2.6. Bolygók és csillagok

Bolygó egyensúlyi hőmérséklete	$T_p = T_s(1 - \alpha)^{1/4} \sqrt{\frac{R_s}{2a}}$
	$\frac{4\pi\sigma R_s^2 T_s^4}{4\pi a^2} (1 - \alpha) R_p^2 \pi = 4\pi\sigma R_p^2 T_p^4$
Tömeg-luminozitás reláció	$L \propto M^\alpha, \quad \alpha \approx 3,5$ Fősorozati csillagokra érvényes.
Fősorozaton töltött idő	$t_{MS} = \frac{E_{tot}}{L} \propto \frac{M}{L} \propto M^{1-\alpha} \approx M^{-2,5}$
Csillag sugárzás miatti tömegvesztése	$\frac{dM(t)}{dt} = -\frac{L(t)}{c^2}$
Proton-proton (p-p) ciklus	$4 p^+ \Rightarrow {}^4\text{He}^{2+} + 2 e^+ + 2 \nu_e + 2 \gamma$
Pulzáló változócsillag	A maximális fényességhez maximális hőmérséklet, és minimális sugár tartozik.
	Példák: RR Lyr, cefeidák, δ Sct, mirák, β Cep
Schwarzschild-sugár	$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}$ Az a sugár, amely alatt egy M tömegű objektum fekete lyukká válik, továbbá egy M tömegű fekete lyuk sugara.

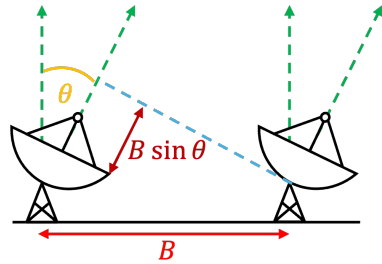
2.7. Kettőscsillagok és tranzitok

Kontaktusok időpontjai	
Sugarak aránya	$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 - \frac{t_{d-a}}{t_{c-b}}}{1 + \frac{t_{d-a}}{t_{c-b}}} = \frac{t_{b-a}}{t_{c-a}}$
Hőmérsékletek aránya	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_{2,max}}{\lambda_{1,max}}$
Luminozítások aránya	$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$
Exobolygótranzit mélysége	$\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_{bolygó}^2}{R_{csillag}^2}$

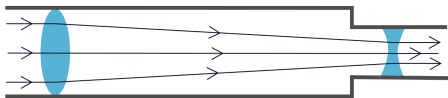
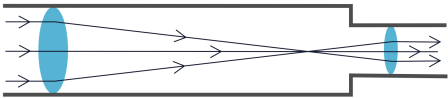
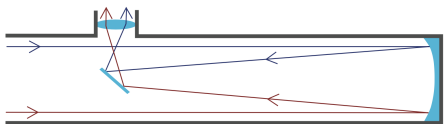
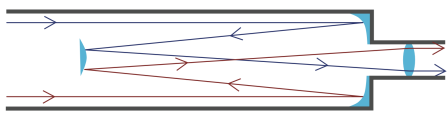
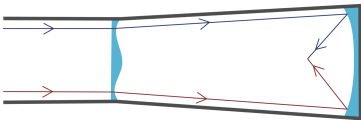
3. Optika

3.1. Alapvető összefüggések

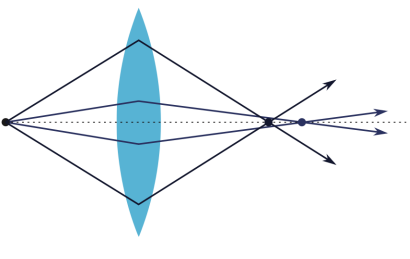
Nagyítás	$N = \frac{f_{\text{objektív}}}{f_{\text{okulár}}} = \frac{D_{\text{belépő}}}{D_{\text{kilépő}}} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$ N valójában szögnagyítás.
Fényerő	$f_{\text{obj}}/D.$ Jelölés: $f/(\text{fényerő})$.
Felbontóképesség	$\theta_{[\text{rad}]} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ A legkisebb szögtávolság két objektum között, amely esetén még fel tudjuk őket bontani.
Képskala	$p = \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{1}{f_{\text{obj}}}$ $\Delta s = f_{\text{obj}} \cdot \tan \Delta \theta \approx f_{\text{obj}} \Delta \theta \implies p \equiv \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{1}{f_{\text{obj}}}$
Okulár látómezeje	$\theta_{\text{látszó}} = \frac{\theta_{\text{névleges}}}{N}$
Távcső látómezeje (csillagátvonulás)	$\theta_{\text{látszó}} = 2 \cdot \frac{t}{23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}} \cdot 360^\circ \cdot \cos \delta$
Leképezési törvény	$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$ Előjel-konvenció: • Valódi kép: $k > 0$, virtuális kép: $k < 0$ • Valódi tárgy: $t > 0$, virtuális tárgy: $t < 0$

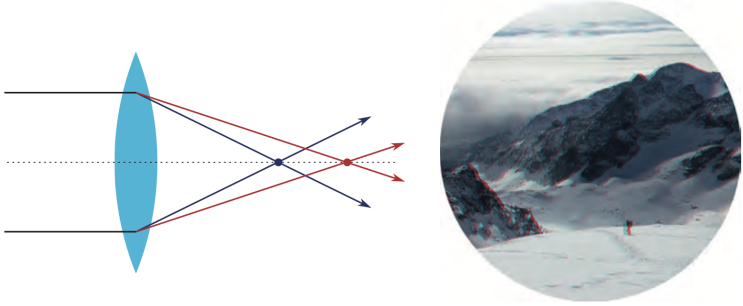
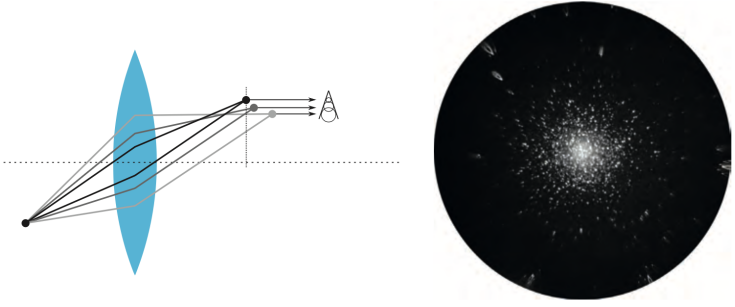
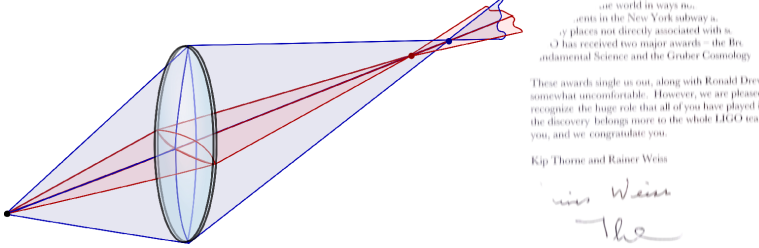
Dioptria	$d = \frac{1}{f}$
Dioptriák összeadása	$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ Ha a lencsék közötti távolság d: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$
Tubushossz	$L = f_{\text{objektív}} + f_{\text{okulár}}$
Távcsöves határmagnitúdó	$m_t = m_{sz} + 5 \log \left(\frac{D_t}{D_p} \right)$ $m_{sz} \approx 6^m$: szabad szemes határmagnitúdó, D_p: pupilla átmérője (kb. 6 mm)
Gömbtükör fókusztávolsága	$f = R/2$ R: görbületi sugár
Interferométer felbontása	$\theta_{[\text{rad}]} \approx \frac{\lambda}{B}$ B: bázisvonal 
Spektrális felbontás	$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ $\Delta\lambda$: legkisebb észlelhető hullámhosszkülönbség
Törésmutató	$n = \frac{c_0}{c}$ c_0: vákuumbeli fénysebesség, c: közegbeli fénysebesség
Snellius–Descartes-törvény	$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $\theta_{1,2}$: a felület normálvektora és a fénysugár irányvektora által bezárt szögek
Vékony lencse fókusztávolsága	$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ n: lencse közeghez viszonyított relatív törésmutatója, $R_{1,2}$: görbületi sugarak, konvex felületnél pozitív

3.2. Távcső típusok

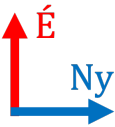
Galilei-távcső	 Okulár: szórólencse
Kepler-távcső	 Okulár: gyűjtőlencse
Newton-távcső	 Paraboloid főtükr, sík segédtükr
Cassegrain-távcső	 Paraboloid főtükr, hiperboloid segédtükr
Schmidt-távcső	 Gömbi főtükr, előtte korrekciós lemez

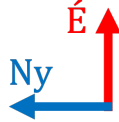
3.3. Távcsövek leképezési hibái

Gömbi hiba	 A lencse vagy tükr az optikai tengelytől távol beeső fénysugarakat máshova fókuszálja, mint az ahhoz közeliakat.
------------	--

Színi hiba	 A lencse a különböző hullámhosszúságú fénysugarakat máshova fókuszálja.
Kómahiba	 Az optikai tengelytől nagy távolságra lévő, nagy nyílásszögű fénysugarak más mértékben térülnek el.
Asztigmatizmus	 A távcső fókusz távolsága eltérő függőleges és vízszintes irányban. Az ábra vízszintes irányban fókuszált távcső által szolgáltatott képet mutat.

3.4. Irányok a távcsőben

Irányok az égbolton	Dél felé fordulva a zenitben az alábbi irányok érvényesek: 
Nyugati irány	A csillagok a látómezőből mindig nyugati irányban mennek ki.

Távcső forgatása zenittükör nélkül	Elforgatva ugyan, de az égboltnak megfelelő körüljárási irány látható a látómezőben, középpontosan tükrözött a kép. Reflektorok (pl. Newton-távcső) esetén is csak elforgatott a kép, a körüljárási irány nem módosul.
Távcső forgatása zenittükörrel	Tengelyesen tükrözött és elforgatott a kép: 

3.5. CCD detektorok

Kvantumhatásfok (η)	$N_\gamma = \eta \frac{dN}{dt} t_{\text{exp}}$ N_γ : észlelt fotonok száma, $\frac{dN}{dt}$: fotonok beérkezési rátája, t_{exp} : expozíciós idő
Erősítési tényező (gain)	$G \equiv \frac{S^{[e^-]}}{S^{[\text{ADU}]}}$ S : jel ADU: Analog Digital Unit; ilyen egységekben tárolja a képfájl az egyes pixelek észlelt fényességét.
Észlelt jel zaja (photon shot noise)	$\sigma_{\text{ps}} = \sqrt{N_\gamma}$ N_γ : forrásból detektált fotonok száma A detektált fotonok száma Poisson-statisztikát követ.
Kiterjedt forrásból detektált jel zaja	$\sigma_{\text{ps, kit}} = \sqrt{n_p \cdot N_{\text{kit, 1 px}} \cdot t_{\text{exp}}} = \sqrt{N_{\gamma, \text{kit}}}$ $[N_{\text{kit, 1 px}}] = \text{foton/px/s}$ n_p : az objektum képe által lefedett pixelek száma Feltéve, hogy a felületi fényesség homogén.
Kiolvasási zaj (readout noise)	$\sigma_r = \sqrt{n_p \cdot N_r^2}$ N_r : pixelenkénti kiolvasási zaj
Sötétzaj (dark noise)	$\sigma_d = \sqrt{n_p \cdot N_d \cdot t_{\text{exp}}}$ N_d : pixelenkénti és időegységenkénti sötétáram A sötétáram-elektronok száma Poisson-eloszlást követ.
Jel-zaj arány	$\frac{S}{N} = \frac{N_{\gamma, \text{forrás}}}{\sqrt{N_{\gamma, \text{forrás}} + N_{\gamma, \text{háttér}} + n_p \cdot N_r^2 + n_p \cdot N_p \cdot t_{\text{exp}}}}$ A zajforrások függetlennek tekinthetők, így azokat négyzetesen összeadhatjuk.

4. Szférikus csillagászat

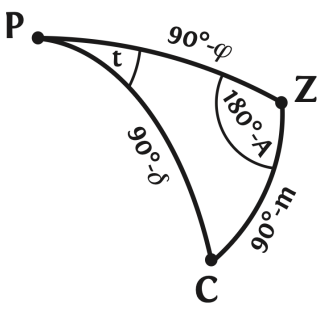
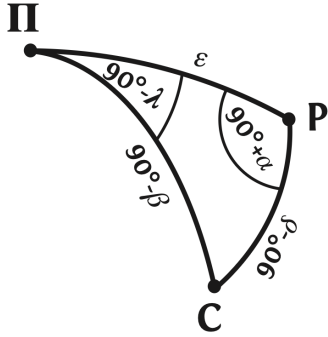
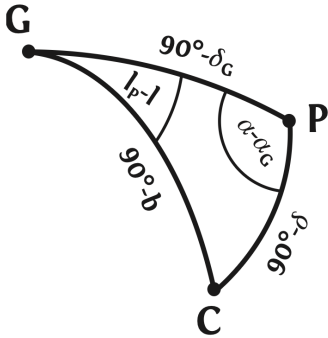
Fontos! A Képletgyűjtemény az azimut **magyar** konvencióját követi.

4.1. Alapvető összefüggések

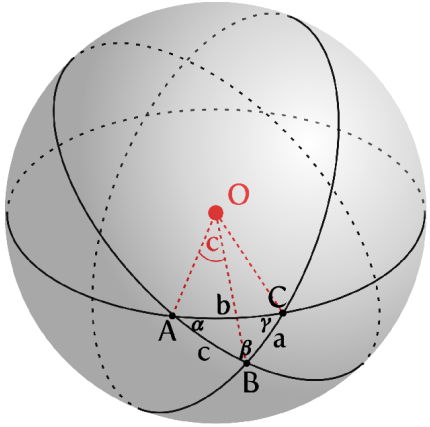
Azimut	Magyar konvenció: A -t a déli iránytól mérjük
	IOAA-konvenció: A -t északról mérjük Átváltás: $A_{\text{IOAA}} = A_{\text{Hun}} \pm 180^\circ$; $0^\circ \leq A < 360^\circ$
Depressziószög	$\cos \theta = \frac{R}{R+h}$
Horizont távolsága	$d = \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh}$ ha $h \ll R$
Láthatósági feltételek	Észak: Cirkumpoláris: $\delta > 90^\circ - \varphi$ Sosem kel fel: $\delta < \varphi - 90^\circ$
	Dél: Cirkumpoláris: $\delta < -90^\circ - \varphi$ Sosem kel fel: $\delta > 90^\circ + \varphi$
Légköri refrakció	$\psi = 0,5^\circ$ a horizont közelében Megemeli az objektumot $\Rightarrow h_{\text{valós}} < h_{\text{látszó}}$
Trigonometrikus függvények megoldásai	$\sin \alpha = b \Rightarrow \alpha_1 = \arcsin b + 2\pi k$ $\alpha_2 = \pi - \arcsin b + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$ $\cos \alpha = b \Rightarrow \alpha_1 = \arccos b + 2\pi k$ $\alpha_2 = 2\pi - \arccos b + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
	Gömbháromszögekre alkalmazva: - Háromszög-egyenlőtlenség igaz - Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ $a + b + c \leq 3\pi$

4.2. Koordináta-rendszerek

Rendszer	Alapsík	Alapirány	Szélesség	Hosszúság	Körüljárás
Horizontális	horizont	déli irány	h	A ($0^\circ - 360^\circ$)	negatív
I. ekvatoriális	égi egyenlítő	déli irány	δ	t ($0^h - 24^h$)	negatív
II. ekvatoriális	égi egyenlítő	tavaszpont	δ	α ($0^h - 24^h$)	pozitív
Ekliptikai	ekliptika	tavaszpont	β	λ ($0^\circ - 360^\circ$)	pozitív
Galaktikus	Tejútrendszer síkja	Tejútrendszer középpontja	b	l ($0^\circ - 360^\circ$)	pozitív

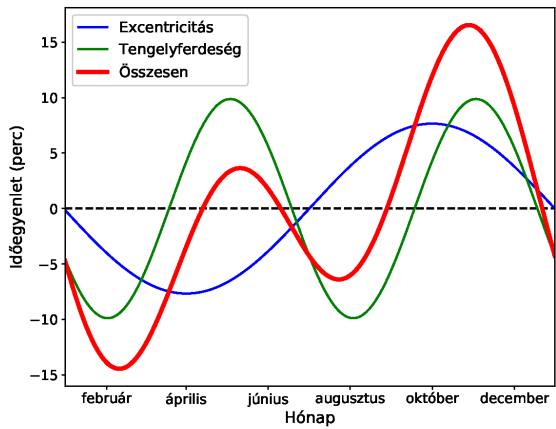
Zenittávolság	$z = 90^\circ - h$
Delelő objektum horizont feletti magassága	$h = 90^\circ - \varphi - \delta $
Félnapi ív	$\cos t = -\tan \delta \tan \varphi$
Horizont felett tartózkodás ideje	$T = 2t \cdot \frac{24^h}{23^h 56^m 4^s}$
Óraszög általános h horizont feletti magasságnál	$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}$
Nap koordinátáinak időfüggése	$\lambda_\odot(t) = \frac{360^\circ}{365,2422^d}(t - t_0) \quad \sin \delta_\odot = \sin \varepsilon \sin \lambda_\odot$ $\tan \alpha_\odot = \cos \varepsilon \tan \lambda_\odot$ t_0: tavaszi nap-éj egyenlőség időpontja Körpályát feltételezve – fiktív ekliptikai középnap
Horizontális-ekvatoriális átváltás	 P: égi pólus, Z: zenit, C: csillag
Ekvatoriális-ekliptikai átváltás	 P: égi pólus, Π: ekliptikai pólus, C: csillag
Ekvatoriális-galaktikus átváltás	 P: égi pólus, G: galaktikus pólus, C: csillag

4.3. Gömbháromszögtan

Gömbháromszög részei	
Gömbháromszögtani szinusztétel	$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$
Gömbháromszögtani koszinusztétel oldalakra	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
Gömbháromszögtani koszinusztétel szögekre	$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$
Gömbháromszög térszöge	$\Omega^{[sr]} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
Gömbháromszögtani távolságképlet	$\cos d = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$ $\varphi_{1,2}$: a két pont általános szélességi koordinátái, $\lambda_{1,2}$: a két pont általános hosszúsági koordinátái
Kis távolság gömbháromszögön	$d = \sqrt{\Delta \delta^2 + \Delta \alpha^2 \cos^2 \delta}$

4.4. Időszámítás

Csillagidő	$LST \equiv \alpha + t = \alpha_{\text{delelő}} = t\gamma$ $t\gamma$: tavaszpont óraszöge
Zónaidő	$LT = UT + k$ UT: koordinált világidő, k: időzóna
Csillagidő-varázsképlet	$LST = GST_0 + \lambda + \frac{24^h}{23^h56^m4^s}(LT - k)$ GST_0: greenwichi csillagidő aznap éjfélnél, λ: hosszúsági korrekció
Hosszúsági korrekció	$\lambda = \frac{24^h}{360^\circ} \lambda_g$ λ_g: földrajzi hosszúság A keleti hosszúság pozitív, a nyugati pedig negatív.
Időszámítás maradéka	Ha időszámításnál 24^h -nál nagyobb vagy 0^h -nál kisebb érték jön ki, vegyük a 24-es maradékát!

	Greenwichi éjféli csillagidő	$\text{GST}_0 = 12^{\text{h}} + \frac{24^{\text{h}}}{365,2422^{\text{d}}}(t - t_0)$ Planetáriumi becsléshez: Havonta 2^{h} -t változik az éjféli csillagidő.
	Napdefiníciók	• Csillagnap/sziderikus nap: Egy állócsillag két delelése közt eltelt idő: $23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}$ • Középszoláris nap: 24^{h} • Szoláris nap: A Nap két delelése közt eltelt idő (nem egyenletes).
	Évdefiníciók	• Sziderikus év: Amnyi idő, amennyi a Földnek kell, hogy a Napot egyszer megkerülve az állócsillagokhoz képest ugyanoda kerüljön: $365,25636^{\text{d}}$ • Tropikus év: A Nap tavaszponton történő két egymást követő áthaladása között eltelt idő: $365,24219^{\text{d}}$
	Föld precessziójának periódusa	$\frac{1}{T_{\text{prec}}} = \frac{1}{T_{\text{tropikus}}} - \frac{1}{T_{\text{sziderikus}}}; \quad T_{\text{prec}} \approx 26\,000 \text{ yr}$
	Fiktív ekliptikai középnap	Fiktív égitest, amely egyenletes szögsebességgel halad az ekliptikán, úgy hogy periódusideje pontosan megegyezik a valódi Nap periódusidejével, és azzal mindig akkor találkozik, amikor a Föld perihéliumban van.
	Fiktív egyenlítői középnap	Fiktív égitest, amely az égi egyenlítőn halad egyenletes szögsebességgel, periódusideje megegyezik a fiktív ekliptikai középnapéval, és azzal a tavaszponton találkozik.
	Valódi szoláris idő	$m_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}}$
	Középszoláris idő	$m_{\text{k}} = t + 12^{\text{h}}$ t: fiktív egyenlítői középnap óraszöge
	Időegyenlet	$\text{ET} = m_{\text{k}} - m_{\odot}$ 
	Julián dátum	Kr. e. 4713. 12:00 UTC óta eltelt középszoláris napok száma.

4.5. Egyéb összefüggések

Fázisegyenlet	$p = \frac{1 + \cos \beta}{2}$ p: a terminátorra (árnyékhatár) merőleges szögátmérő megvilágított hányada, β: fázisszög, Nap-égitest-Föld $\angle$
Bolygóhelyzetek	
Legnagyobb elongáció	$\sin \tau = \frac{a_p}{a_{\oplus}}$ τ: legnagyobb elongáció, a_p: belső bolygó fél nagytengelye Elongáció: az égitest Naptól mért szögtávolsága
Szürkületek	• Polgári: $0^\circ > h_{\odot} > -6^\circ$ • Navigációs: $-6^\circ > h_{\odot} > -12^\circ$ • Csillagászati: $-12^\circ > h_{\odot} > -18^\circ$
Objektum Descartes-féle koordinátái	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \delta \cos \alpha \\ r \cos \delta \sin \alpha \\ r \sin \delta \end{pmatrix}$

5. Kozmológia

5.1. Alapvető összefüggések

Hubble–Lemaître-törvény	$v = H_0 d, \quad H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$																
Kritikus sűrűség	$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$																
Skálafaktor ($a(t)$)	$d(t) = a(t)d_0$ d_0 : adott t_0 időpontban mért távolság																
Friedmann-egyenletek	$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$ $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$																
Sűrűséparaméterek	$\Omega_i = \rho_i/\rho_c, \quad \Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \simeq 1$ $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 a^2}$																
Kozmikus kalendárium	<table><tr><td></td><td>t (év)</td><td>T (K)</td><td>z</td></tr><tr><td>Ma</td><td>$13,8 \cdot 10^9$</td><td>2,725</td><td>0</td></tr><tr><td>Rekombináció</td><td>380 000</td><td>3000</td><td>1100</td></tr><tr><td>Sugárzás-anyag egyensúly</td><td>58 000</td><td>10 000</td><td>3850</td></tr></table>		t (év)	T (K)	z	Ma	$13,8 \cdot 10^9$	2,725	0	Rekombináció	380 000	3000	1100	Sugárzás-anyag egyensúly	58 000	10 000	3850
	t (év)	T (K)	z														
Ma	$13,8 \cdot 10^9$	2,725	0														
Rekombináció	380 000	3000	1100														
Sugárzás-anyag egyensúly	58 000	10 000	3850														
Energiasűrűség	$u_i = \rho_i c^2$																
Ideálisfolyadék-közelítés	$p = w\rho c^2$																
Hubble-idő	$t_{\text{H}} = 1/H$																
Skálafaktor és vöröseltolódás	$\frac{a_{\text{obs}}}{a_{\text{em}}} \equiv \frac{1}{a} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} = 1 + z$ z : az a vöröseltolódás, amelynél egy, a CMB által kibocsátott fotont érzékelünk																
CMB hőmérséklete	Wien-törvény: $T = \frac{b}{\lambda} = \frac{b}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{a} = T_0(1 + z)$ $T_0 = 2,725 \text{ K}$																
Sűrűségek és skálafaktorok	$\rho_m \propto a^{-3}$ Sugárzásdom.: $a(t) \propto t^{1/2}$ $\rho_r \propto a^{-4}$ Anyagdom.: $a(t) \propto t^{2/3}$ $\rho_{\text{DE}} = \text{konst.}$ Sötétenergia-dom.: $a(t) \propto e^{Ht}$																
Galaxis távolodási sebessége	$\mathbf{v}_{\text{tot}} = \mathbf{v}_{\text{Hubble}} + \mathbf{v}_{\text{saját}} = H_0 d \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{saját}}$																
Tömeg-luminozitás arány	$\Upsilon = \frac{M}{L}$ Galaxisokra: $\Upsilon \approx 2 - 10 \Upsilon_\odot$ A megfigyelhető univerzum: $\Upsilon \approx 100 \Upsilon_\odot$ Ok: sötét anyag, ami nem bocsát ki fényt.																

5.2. Kozmológiai távolságok

Együttmozgó távolság (co-moving distance)	d_c : minden időpillanatban az 1-es skálafaktorra vonatkozó sajátávolság. Analógia: a vonalzó nyúlik a térrel együtt, ezt tudjuk mérni.
Sajátávolság (proper distance)	$d_p = a(t)d_c$ A nyújthatatlan vonalzóval mért távolság, számolni tudjuk csak.
Luminozitástávolság	$d_L = (1 + z)d_c$ Az a távolság, amelynek négyzetével arányosan csökken a test fluxusa. $m - M = -5 + 5 \log_{10} d_L + K$ K : K-korrekción, számolt és mért magnitúdó különbsége
Szögátmérő-távolság	$d_A = (1 + z) \frac{D}{\theta} = \frac{1}{(1 + z)^2} d_L$ D : valódi átmérő, θ : látszó szögátmérő A látszó szögátmérőből és a valós fizikai méretből számolt távolság.

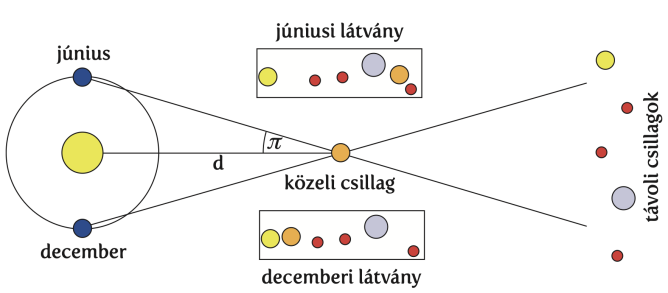
6. Távolságmérés

Fontos! Az alábbi fejezetben M az objektumok tömegét jelöli, nem az abszolút magnitúdójukat. Utóbbira az azzal ekvivalens L luminozitás használatos.

6.1. Távolságegységek

Csillagászati egység (CSE, AU)	A Föld Nap körüli pályájának fél nagytengelye, $1 \text{ CSE} \approx 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$.
Fényév (ly)	Távolságegység. 1 fényév távolságot a fény vákuumban 1 év alatt tesz meg. $1 \text{ fényév} = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Parszek (pc)	1 pc távolságból 1 CSE $1''$ szög alatt látszik. $1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,262 \text{ ly} = 206265 \text{ CSE}$

6.2. Távolságmérési módszerek

Éves parallaxis (π)	Bázisvonal: a Föld pályájának átmérője. $d[\text{pc}] = \frac{1}{\pi['']}$  Hatótávolság: 1 CSE – 1 kpc
Napi parallaxis (p)	Bázisvonal: a Föld fizikai átmérője. $d = \frac{R_{\oplus}}{p[\text{rad}]} = \frac{206265 \cdot R_{\oplus}}{p['']}$
Parallaxis tetszőleges bolygóról	$d[\text{pc}] = \frac{a_p^{[\text{CSE}]}}{\pi['']}$ a_p: bolyó pályasugara
Csillag teljes észlelt elmozdulása	$\Delta\theta = 2 \cdot \pi$ π: parallaxisszög A parallaxisszög a teljes elmozdulás fele!
Szekuláris parallaxis	A Nap apex felé történő mozgása révén megtett utat használjuk a parallaxis bázisvonalának.
Spektroszkópiai parallaxis	Csillagokra: ismert színeképosztály $\Rightarrow$ becslhető $L \Rightarrow$ távolságmodulus Hatótávolság: 1 pc – 100 kpc

Radarmérés	Rádióhullámokat bocsátunk ki az objektum felé, és mérjük a visszaverődéshez szükséges Δt időt, amiből $d = (c\Delta t)/2$ Hatótávolság: Naprendszeren belül, 10 CSE
Dinamikai parallaxis	Optikai kettősök: meghatározzuk a periódust, a fél nagytengely látszó szögméretét és a látszó összfényességet $\Rightarrow$ Kepler III-ból tömeg, $M - L$ reláció, távolságmodulus $\Rightarrow$ Hatótávolság: Naprendszeren belül, 10 CSE
Fősorozat-illesztés	Halmazokra: a csillagok ábrázolhatóak a HRD-n, mivel kb. azonos távolságuk $\Rightarrow$ bekalibrálható $L \Rightarrow$ távolságmodulus Hatótávolság: 100 pc – 100 kpc
Mozgási halmaz módszer	A halmaz csillagainak sebességvektora egy pontba mutat. Ismerve a sajátmozgásból és radiális sebességből számolt térbeli sebességet és a mozgás irányát, megkaphatjuk a távolságot. Hatótávolság: 50 pc – 1 kpc
Tágulási parallaxis	Szupernóva-maradványok: a látszó szögátmérő tágulási sebességéből és Doppler-eltolódásból tágulási sebességből.
Fényvisszhang (light echo)	Szupernóvák fénye gömbszimmetrikusan világít meg porrészecskéket, és ez a gömb fénysebességgel tágul $\Rightarrow$ a szögátmérő időbeli változásából következik a távolság. Hatótávolság: 10 kpc – 100 kpc
Baade–Wesselink-módszer	Pulzáló csillagok: periódus, tágulási sebesség $\Rightarrow$ sugárárány és sugarak különbsége + hőmérsékletek, fluxusok $\Rightarrow$ távolság
Változócsillagok	Cefeidák, RR Lyraek: $P - L$ relációból $L \Rightarrow$ távolságmodulus Hatótávolság: 100 pc – 10 Mpc
Ia típusú szupernóvák	Azonos magtömegnél robbannak fel $\Rightarrow$ azonos $L \Rightarrow$ távolságmodulus Hatótávolság: 500 kpc – 10 Gpc
Tully–Fisher-reláció	Spirálgalaxisok forgási sebességére $L \propto v_{\text{rot}}^4 \Rightarrow M \Rightarrow$ távolságmodulus
Faber–Jackson-reláció	Elliptikus galaxisokra $L \propto \sigma^4 \Rightarrow$ távolságmodulus σ : sebességszórás
Hubble–Lemaître-törvény	$v_r = H_0 d$ Hatótávolság: 100 Mpc – 10 Gpc
Gravitációs hullámok (standard szirénák)	A gravitációs hullámok által okozott téridő-deformáció amplitúdója $1/r$ -esen cseng le $\Rightarrow$ távolság

7. Adatelemzés

7.1. Statisztikai mutatók

Átlag	$\mu \equiv \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
Relatív bizonytalanság	$\delta x = \frac{\Delta x}{ x }$
Populáció szórása (empirikus szórás)	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$ Az összes adatpontra (a teljes eloszlásra) vonatkozó szórás. Ha sok adatpontunk van, jó közelítéssel használható.
Minta szórása (korrigált empirikus szórás)	$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$ Kis számú adatpontra ez a képlet ad pontos eredményt (<i>torzítatlan becslést</i>) a szórásra.
Átlagérték bizonytalansága	$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$
Medián	Növekvő sorrendbe rendezett adatok közül a középső érték. Páros számú adatnál a két középső érték átlaga.
Módusz	Az adatsor leggyakoribb adata.
Kvartilis	A három kvartilis (Q_1 , Q_2 , Q_3) négy egyenlő gyakoriságú részre osztja az adathalmazt. A Q_1 alsó kvartilis az adathalmaz első, a Q_3 felső kvartilis az adathalmaz második felének a felezőpontja, míg a Q_2 kvartilis az adatsor mediánja.
Percentilis	Az adatsor századolópontjai.
Poisson-eloszlás	Annak a valószínűsége, hogy adott idő alatt pontosan N esemény következik be: $\mathbf{P}(X = N) = \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda}$ λ: események várható száma Véletlenszerűen és egymástól függetlenül bekövetkező események sokaságára vonatkozik, pl. adott idő alatt beérkező fotonok száma.
Beütésszám bizonytalansága (Poisson-statisztika)	$\Delta N = \sqrt{N}$ $\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{f \cdot t}}$ N: beütésszám, f: időegységenkénti beütésszám (ráta), t: mérés időtartama Minél tovább mérünk, annál pontosabb lesz a mért beütésszám, így pl. a fluxus.

7.2. Hibaterjedés

Fontos! Az alábbi képletek akkor igazak, ha a változók bizonytalanságai egymástól függetlenek.

Gauss-féle hibaterjedés	Legyen $f(x, y, z, \dots)$ egy többváltozós függvény. Ekkor $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \dots}$
Konstanssal szorzás	$f = cx \implies \Delta f = c \Delta x $
Összeg és különbség	$f = x \pm y \implies \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
Szorzat	$f = xy \implies \delta f = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$
Hatványfüggvény	$f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ $\delta f = \sqrt{\alpha^2 (\delta x)^2 + \beta^2 (\delta y)^2 + \gamma^2 (\delta z)^2}$

Az alábbi képlet akkor igaz, ha a változók hibái nem, vagy nem feltétlenül függetlenek egymástól.

Maximális hiba	$\Delta f = \left \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right + \left \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right + \left \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right + \dots$ Felső határt ad a bizonytalanságra.
----------------	--

7.3. Nemlineáris függvények transzformációja lineáris függvénnyé

Tegyük fel, hogy egy nemlineáris függvény együtthatóit szeretnénk meghatározni, és az átírható $y_L = mx_L + b$ alakba. Ekkor a meredekség $m = \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L}$ módon számítható, ahol Δy_L és Δx_L a transzformált koordináták különbségei két adatpontra.

Függvény	Ábrázolandó	Meredekség	Tengelymetszet
$y = mx + b$	y vs. x	m	b
$y^2 = bx + c$	y^2 vs. x	b	c
$y = d/x$	y vs. $1/x$	d	0
$y = ae^{kx}$	$\ln y$ vs. x	k	$\ln a$
$y = ax^b$	$\ln y$ vs. $\ln x$	b	$\ln a$

7.4. Diagramok

7.4.1. Minek kell szerepelnie egy grafikonon?

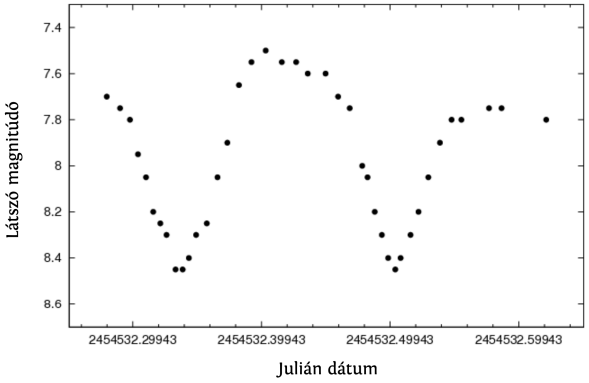
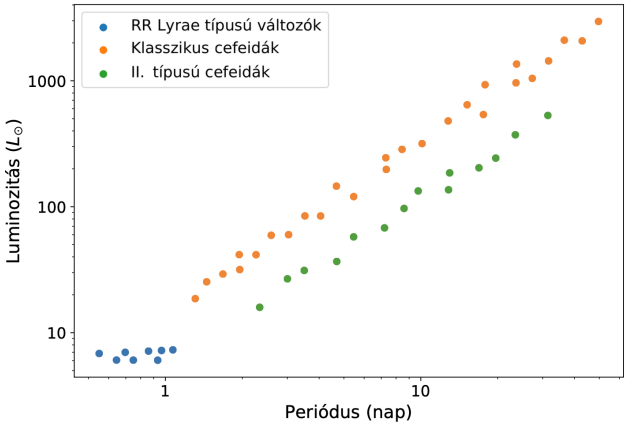
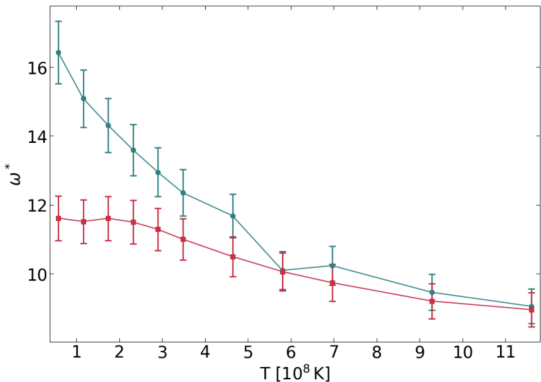
Egy diagramon mindig szerepeljenek az alábbiak:

- Cím vagy feladat száma (mit ábrázolunk?)
- Tengelyfeliratok (mik szerepelnek a tengelyeken?)
- Tengelyek mértékegységei (milyen mértékegységekkel mérjük az ábrázolt értékeket?)
- Tengelybeosztások

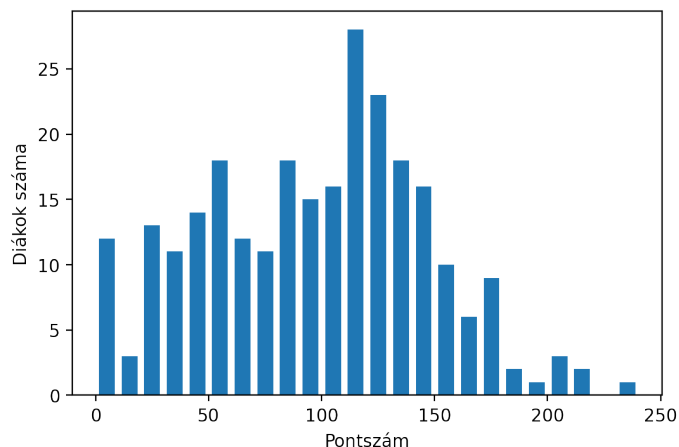
7.4.2. Általános tanácsok grafikonkészítéshez

- Használjunk ceruzát az adatpontok ábrázolásához, a radír és a vonalzó is hasznos lehet.
- A feladat általában megadja, hogy mit (y tengely) minek a függvényében (x tengely) ábrázolj.
- Ellenőrizzük le kétszer a két adatsor minimumát és maximumát, hogy mindenképpen kiferjen az összes ábrázolandó pont a grafikonra.
- Az adatsorok amplitúdója alapján döntsük el, hogy függőleges vagy vízszintes legyen a papír.
- Töltsük ki a rendelkezésre álló papír legalább 70%-át!
- Legyen értelmes a skála, avagy a milliméterpapír beosztásaihoz rendeljünk 1, 2, 5, vagy 10 egységni különbséget.
- Ha a fenti nem lehetséges, akkor a pontok helyeit számítanunk vagy becsülnünk kell, utóbbit csakis idő szűkében tesszük. Ha például a tengelyen $\Delta x = 10$ egység a papíron $\Delta l = 7$ cm-nek felel meg, akkor a grafikon skálázása $S = \Delta l / \Delta x = 7$ cm/egység. Ennek megfelelően egy tetszőleges $\Delta x'$ egységkülönbség a papíron $\Delta l' = S \Delta x'$ fizikai méretben fog szerepelni, melyet vonalzóval könnyedén kimérhetünk.
- Ha az adatok sok számjegyből állnak és a feladat nem köti ki, hogy tilos, leegyszerűsíthetjük őket egyszerű kivonással, például Julián dátumból kivonhatunk 2 460 000-t, ekkor a tengely felirata legyen $JD - 2\,460\,000$.
- Az értékeket szabad kerekíteni, ha nem okoz feltűnő eltérést. Ha például az ábrázolandó érték a 6,32, és a beosztások a 6,30 és 6,40 értékekhez tartoznak, az adatpont nyugodtan kerülhet a 6,30 vonalára.
- Érdemes az adatsor már felhasznált részét letakarni, hogy tudjuk, hol tartunk.
- Ha több adatsort ábrázolunk egy grafikonon, azok jelei legyenek különbözőek, például $\times$ és $+$.
- Ne használjunk kör(lap) szimbólumot adatpont jelöléséhez!
- A kiugró értékeket is ábrázoljuk, de részletes indoklás mellett kihagyhatjuk őket a statisztikai mutatók számításánál.
- Görbe berajzolásánál az ne illeszkedjen pontosan az adatpontokra a mérési hiba miatt.
- Az illesztett görbe – akár vonalzóval, akár kézzel rajzoljuk – legyen „lendületes”, azaz rajzolás közben ne emeljük fel a ceruzát.
- Ha az adatok bizonytalanságait is megadták, azokat mindenképpen tüntessük fel.
- Grafikus egyenesillesztésnél ugyanannyi pont legyen az egyenes felett és alatt.
- Egyenes meredekségének becslésénél rajzoljuk be az alsó és a felső egyenest, melyek középen metszik az illesztett egyenest, majd ebből adjunk becslést az illesztés paramétereinek hibáira.
- Magnitúdók ábrázolásánál a tengely legyen fordított skálázású.

7.4.3. Diagramtípusok

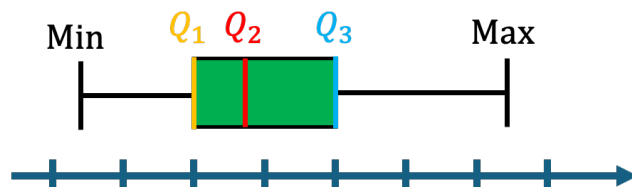
Szórásdiagram	 Az értékeket egyszerűen egymás függvényében ábrázoljuk.
Logaritmikus grafikon	 A tengelyeken a kitevők nőnek lineárisan. Két nagyobb beosztás egymástól kilenc egységre van, mivel például a $10 \cdot 10^3$ a 10^4 első beosztása is egyben. Lehet csak az egyik vagy mindkét tengelye logaritmikus.
Lineáris interpoláció	 Minden két szomszédos adatpont közé egy azokat összekötő szakaszt húzunk, így becslést tudunk adni a görbe viselkedésére az ismert adatok között.

Hisztogram



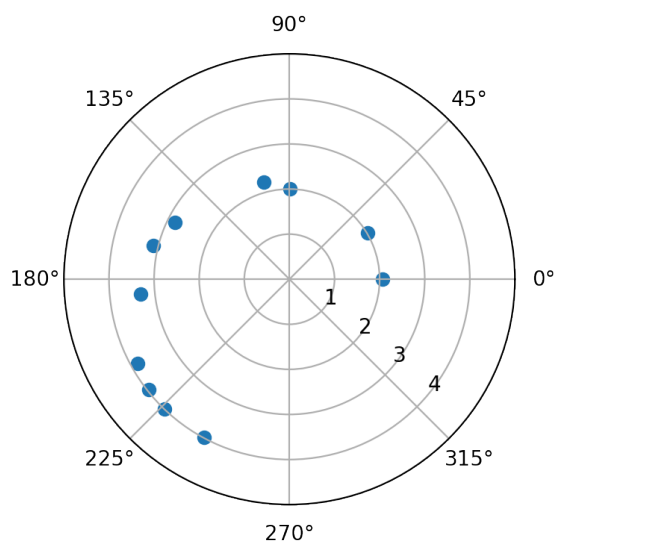
Egyváltozós statisztika bemutatására használjuk. Az adatsorunk tartományát felosztjuk azonos intervallumokra (binekre), majd ábrázoljuk, hogy az adott tartományba hány érték esik. Az összes érték számával osztva relatív gyakoriságokkal is ábrázolható.

Dobozdiagram



Az adatsor minimumát, maximumát és három kvartilisét ábrázoló diagram, mely a hisztogramhoz hasonlóan a minta eloszlását mutatja.

Poláris diagram



Az (x, y) koordinátpár helyett a pontokat egy távolsággal (r) és (pozitív irányban felvett) irányszöggel (θ) jellemezzük.

8. Észlelési és planetáriumi segédlet

8.1. Időszámítás

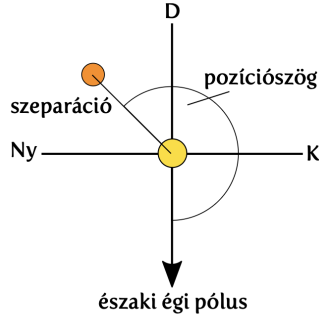
Csillagidőbecslés	Megjegyezzük vagy becslést adunk a versenynap éjszakájának LST_0 éjféli csillagidejére, majd a nálunk lévő analóg karóráról leolvassuk az éjfélig hátralévő t_0 időt. Ekkor $LST \approx LST_0 - t_0.$
Csillagidő-varázsképlet	$LST = GST_0 + \lambda + \frac{24^h}{23^h56^m4^s}(LT - k)$ GST_0: greenwichi csillagidő aznap éjféلكor, λ: hosszúsági korrekció
Greenwichi éjféli csillagidő	Őszi nap-éj egyenlőségkor 0^h , havonta nő 2^h -t, naponta 4^m -t.

8.2. Csillagtérképek

Északi és déli irány a horizonton	Bejelöljük a látható égi pólust és a zenitet. A kettőt összekötő egyenes a horizonttal vett metszéspontjai megadják az északi és déli irányokat.
Szélességbecslés	- Meghatározzuk, hogy az északi vagy déli féltekén vagyunk-e. - Megkeressük az északi és déli irányt. - Lemérjük a csillagtérkép R sugarát a papíron. - Lemérjük a térképen a pólus H távolságát a horizont északpontjától, ha az északi féltekén vagyunk, vagy a délpontjától, ha a délin. - A szélesség ekkor $\varphi = 90^\circ \cdot \frac{H}{R}$, az előjelet az első pont alapján választjuk meg. A csillagtérképeket legtöbbször azimutális egyenlő távolságú projekcióban ábrázolják, csak ezekben működik a fenti módszer, így biztosabb a zenitben dekláló csillagok deklinációjával (ellenőrző) becslést végezni.

8.3. Távcsöves észlelés

Látómező mérete csillagátvonulásból	$\theta_{\text{látászó}} \approx 2 \cdot \frac{\Delta t}{24^h} \cdot 360^\circ \cdot \cos \delta$
-------------------------------------	---

Nyugati irány	A csillagok a látómezőből mindig nyugati irányban mennek ki. Az északi irányt a látómező el- és átfordulásának ismeretében határozzuk meg.
Pozíciószög és szeperáció	 A pozíciószöget a főkomponenstől mérjük, északról keleti irányba.
Szeperáció számítása a látómező elhagyásának időkülönbségéből	$d = \frac{360^\circ}{24^h} \cdot \Delta t \cdot \frac{\cos \delta}{ \sin PA }$
Keresőtávcső párhuzamosítása	Távoli objektumra ráállva addig igazítsuk a keresőtávcső állítócsavarjait, amíg a látómező közepén látott objektum nem esik egybe a szálkereszttel. Fényes és izolált csillagon párhuzamosítsunk, ellenőrizzük le, hogy valóban ugyanazon objektumon áll a főtávcső és a kereső.
Kétszemes módszer	Párhuzamosított keresőtávcsőbe egyik szemmel belenézünk, a másikkal az eget figyeljük – ezzel kivetítjük a szálkeresztet az égre, a nagyítás révén pedig könnyebben találhatjuk meg a célobjektumot.

8.4. Hasznos szférikus csillagászati összefüggések

Földrajzi szélesség	$h_{\text{pólus}} = \varphi$ $\delta_{\text{zenitben delelő}} = \varphi$
Félnapi ív	$\cos t = -\tan \varphi \tan \delta$ A horizont felett tartózkodás ideje a t kétszeresével közelíthető.
Ellentétes pont az égen	$\varphi_{\text{ell}} = -\varphi \quad \lambda_{\text{ell}} = \lambda \pm 180^\circ$ φ, λ: Általános szélességi és hosszúsági koordináták. Rektaszcenzió esetében 180° helyett 12^h-t adunk hozzá vagy vonunk ki a hosszúsági koordinátából.
Gömbháromszögtani távolságképlet	$\cos d = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$
Analemma észak-déli irányú magassága	$h_{\text{Analemma}} = 2\varepsilon$ ε: bolygó tengelyferdesége

8.5. Holdészlelés

Fázisegyenlet	$p = \frac{1 + \cos \beta}{2}$ β: Nap-objektum-Föld $\angle$ Mivel $a_{\text{Hold}} \ll a_{\oplus}$, $p \approx \frac{1 - \cos d}{2}$ d: a Nap és a Hold látszó szögtávolsága
Holdfázis mérése	A távcsövet defókuszáljuk, és kivetítjük a Hold képét egy papírlapra, amire korábban egy, a Hold vetített méretével megegyező kört rajzoltunk. Ezen bejelölve a terminátort a fázis az arra merőleges szögátmérő megvilágított hányadaként adódik.
Hány napos a Hold?	1. Megállapítjuk, hogy telihold után vagyunk-e. 2. A mért fázisból származtatjuk a β fázisszöget, amiből a Nap és a Hold látszó d szögtávolsága közelítőleg $180^\circ - \beta$. 3. Ha t nap telt el újhoid óta, $d(t) = 180^\circ - \left \frac{360^\circ}{29,5^{\text{d}}} \cdot t - 180^\circ \right $ 4. A fenti összefüggést oldjuk meg t-re, az előjelet az első pont alapján választjuk meg: telihold előtt a pozitívat, telihold után a negatívat.
Szelenografikus/holdrajzi koordináták	Az égi irányokhoz képest a kelet-nyugat irány éppen fordítva van, úgy, mint a földrajzi koordináta-rendszer esetében. A holdi egyenlítő és kezdő meridián nem mindig halad át a Hold látszó középpontján a libráció miatt. A Holdon is nyugaton megy le a Nap, viszont a kelet-nyugat irány az égbolti irányokkal ellentétes!

9. Alapvető fizikai összefüggések

9.1. Körmozgás, forgómozgás, energia

Szögsebesség	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$
Kerületi sebesség	$v = r\omega$
Centripetális gyorsulás	$a_{cp} = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$
Egyenletesen változó körmozgás	$\omega(t) = \beta t + \omega_0 \implies \varphi(t) = \frac{1}{2}\beta t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
Harmonikus rezgőmozgás	$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ $v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ $a(t) = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$
Tömegpont perdülete / impulzusmomentuma	$ \mathbf{L} = mrv_{\perp} = mr^2\omega$ Általánosan $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
Merev test perdülete	$ \mathbf{L} = \Theta\omega$ Θ: tehetetlenségi nyomaték
Testek tehetetlenségi nyomatékai	$\Theta_{\text{tömegpont}} = mR^2, \quad \Theta_{\text{tömör gömb}} = \frac{2}{5}mR^2$
Forgatónyomaték	$ \mathbf{M} = Fk = \Theta\beta$ k: erőkar, β: szöggyorsulás Általánosan $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Gravitációs potenciális energia kis magasságokra	$E_{\text{pot}} = mgh$
Kinetikus energia	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
Forgási energia	$E_{\text{forg}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

9.2. Atomfizika

Kötési energia és tömegdefektus	$E_{\text{kötési}} = \Delta m \cdot c^2$ Példa: He-atom tömege kisebb az azt alkotó négy nukleon tömegének összegénél.
eV – J átváltás	$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Optikai rács k -ad rendű maximumának eltérése	$k\lambda = d \sin \alpha$ d: rácsállandó
Fotoeffektus	$E_{\gamma} = h\nu = W_{\text{kilépési}} + \frac{1}{2}m_e v^2$

de Broglie-anyaghullám	$\lambda = \frac{h}{p}$
Határozatlansági reláció	$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
Bohr-modell	$L = n\hbar$ Az elektron perdülete kvantált.
Radioaktív bomlástörvény és aktivitás	$N(t) = N(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = N(0)e^{-\lambda t}$ $A(t) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N(t)$

9.3. Termodinamika

Skálamagasság	Azon karakterisztikus h_0 távolság, amelyen adott mennyiség e -ad részére csökken. $\rho(h) = \rho(0)e^{-\frac{h}{h_0}}$
Felvett hő	$\Delta Q = cm\Delta T$ c : fajlagos hőkapacitás, m : hőt felvevő test tömege
Egyetemes gáztörvény	$pV = nRT = Nk_B T$
Részecske mozgási energiája és sebessége	$E = \frac{f}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle \implies v_{\text{RMS}} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{fk_B T}{m}}$

9.4. Speciális relativitáselmélet (1D)

Lorentz-faktor	$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
Idődilatáció	$\Delta t = \gamma \Delta \tau$ $\Delta \tau$: sajátidő Δt : koordinátaidő
Hosszúságkontrakció	$\Delta L = \frac{\Delta L_0}{\gamma}$ ΔL_0 : sajátávolság
Lorentz-transzformációk	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$ Ha a másik koordináta-rendszerből kell visszatranszformálni, a negatív előjel megfordul, és $\Delta x'$, $\Delta t'$ helyére rendre Δx és Δt kerül.
Relativisztikus lendület	$p = \gamma m v$

Relativisztikus energiaképlet	$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (\gamma mc^2)^2$
Relativisztikus sebességösszeadás	Az A megfigyelő látóirányban távolodik tőlünk v_A sebességgel, a B megfigyelő pedig v_B sebességgel. Ekkor A a következő v'_{A-B} sebességgel látja távolodni B-t: $v'_{A-B} = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}}$

9.5. Elektromágnesség

Coulomb-törvény	$F = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Feszültség	$U_{A-B} = \frac{W_{A-B}}{q}$
Ohm-törvény	$U = RI$
Lorentz-erő	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Ha $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$: $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \mathbf{B}$
Mágneses fluxus	$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} A \cos \theta = \text{konstans}$ θ: indukciós vonal és a sík normálisának szöge

9.6. Egyéb összefüggések

A Hold keringési ideje és a fázisváltozásának periódusa (szinodikus hónap)	$P_{\text{keringés}} = 27,4^{\text{d}}, \quad P_{\text{fázis}} = 29,5^{\text{d}}$ $\frac{1}{P_{\text{fázis}}} = \frac{1}{P_{\text{keringés}}} - \frac{1}{T_{\oplus, \text{szid}}}$
Dimenzióanalízis	Ha tudjuk egy mennyiség dimenzióját és az alapvető paramétereket, amelytől függhet, egy konstans együttható erejéig meg tudunk rá határozni egy összefüggést. Példa: Kepler III. törvénye A keringési periódus a fél nagytengely (a), a gravitációs állandó (G) és a központi égitest tömegétől (M) függhet. Tegyük fel, hogy $P = a^\alpha G^\beta M^\gamma$ alakban áll elő, és tudjuk, hogy $[P] = \text{s}$, $[a] = \text{m}$, $[G] = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ és $[M] = \text{kg}$. Ekkor $\text{s} = \text{m}^\alpha \text{m}^{3\beta} \text{kg}^{-\beta} \text{s}^{-2\beta} \text{kg}^\gamma = \text{m}^{\alpha+3\beta} \text{kg}^{-\beta+\gamma} \text{s}^{-2\beta}$, vagyis mivel a dimenziók megegyeznek, $-2\beta = 1$, $\alpha + 3\beta = 0$ és $-\beta + \gamma = 0$, aminek megoldása $\alpha = 3/2$, $\beta = -1/2$, $\gamma = -1/2$. Ebből következik, hogy egy konstans C szorzó erejéig $P = C \cdot a^{3/2} M^{-1/2} G^{-1/2} = C \cdot \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$, amely konzisztens Kepler III. törvényével: $P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$.

10. Matematikai alapok

10.1. Közelítések

Az alábbi közelítések $|x| \ll 1$ és $|y| \ll 1$ esetben érvényesek. A szögfüggvényeknél a szöget radiánban helyettesítjük.

$\sin x$	$\sin x \approx x$
$\cos x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
$\tan x$	$\tan x \approx x$
Binomiális közelítés	$(1+x)^n \approx 1+nx$
Szorzat közelítése	$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$
e^x	$e^x \approx 1+x$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) \approx x$

10.2. Koordinátageometria

Egyenes egyenlete	$y = mx + b$ $(y - y_0) = m(x - x_0)$ (x_0, y_0) : pont az egyenesen
Kör egyenlete	$(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2$ (u, v) : a kör középpontja
Ellipszis egyenlete	- Vízszintes nagytengely: $\frac{(x - u)^2}{a^2} + \frac{(y - v)^2}{b^2} = 1$ - Függőleges nagytengely: $\frac{(x - u)^2}{b^2} + \frac{(y - v)^2}{a^2} = 1$
Hiperbola egyenlete	- Vízszintes nagytengely: $\frac{(x - u)^2}{a^2} - \frac{(y - v)^2}{b^2} = 1$ - Függőleges nagytengely: $\frac{(y - v)^2}{a^2} - \frac{(x - u)^2}{b^2} = 1$
Parabola egyenlete	- Felfelé/lefelé nyíló: $(x - u)^2 = \pm 2p(y - v)$ - Jobbra/balra nyíló: $(y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$
Parabola paramétere	$p = 2r_p$
Kúpszeletek fokális egyenlete	$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$

10.3. Geometriai alapok

Szinusztétel	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Koszinusztétel	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
Gömb felszíne és térfogata	$A = 4\pi R^2 \quad V = \frac{4\pi}{3} R^3$
Kúp és gúla térfogata	$V = \frac{Am}{3}$ A : alap területe, m : magasság
Térszög	$\Omega = 2\pi(1 - \cos \rho)$ ρ : fél nyílásszög
Kis térszög	$\Omega = 2\pi(1 - \cos \rho) \approx 2\pi \left(1 - 1 + \frac{\rho^2}{2}\right) = \rho^2 \pi$
Gömbsüveg felülete és térfogata	$A = 2\pi Rh + \pi r^2 \quad V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$
Vékony gömbhéj térfogata	$dV = 4\pi r^2 dr$
Radián-ívmásodperc átváltás	$1 \text{ rad} = \frac{180 \cdot 60^2}{\pi} \text{ ívmásodperc} \approx 206265''$
Milliívmásodperc (mas)	$1 \text{ mas} = 10^{-3}''$

10.4. Trigonometria

Pitagoraszsi összefüggés	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
Nevezetes szögfüggvény-azonosságok	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$

10.5. Sorozatok

Számtani sorozat első n elemének összege	$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$
Mértani sorozat első n elemének összege	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$ Ha $ q < 1$: $S = \frac{a_1}{1 - q}$

10.6. Differenciálszámítás

10.6.1. Deriválási szabályok

Az alábbi összefüggések $f(x)$ és $g(x)$, két differenciálható valós értékű függvényre és c skálárra vonatkoznak.

Szorzás állandóval	$(cf)' = cf'$
Összeg és különbség	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Szorzat	$(fg)' = f'g + fg'$
Reciprokfüggvény	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \quad f \neq 0$
Hányados	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$
Láncszabály	$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

10.6.2. Alapvető deriváltak

Konstans függvény	$(c)' = 0$
Hatványfüggvény	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Exponenciális függvény	$(e^x)' = e^x$
Általános alapú exponenciális függvény	$(a^x)' = a^x \ln a$
Természetes logaritmus-függvény	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
Általános alapú logaritmus-függvény	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a \neq 0, 1$
Színuszfüggvény	$(\sin x)' = \cos x$
Koszinuszfüggvény	$(\cos x)' = -\sin x$
Tangensfüggvény	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Árkuszszínuszfüggvény	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Árkuszkoszinusz-függvény	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Árkusztangensfüggvény	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

10.6.3. Alapvető integrálok

Hatványfüggvény	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
-----------------	--

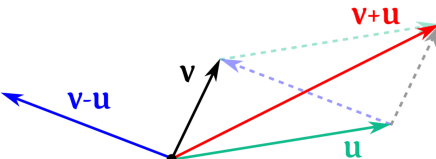
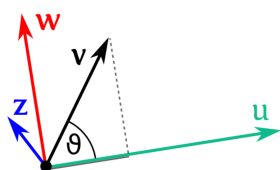
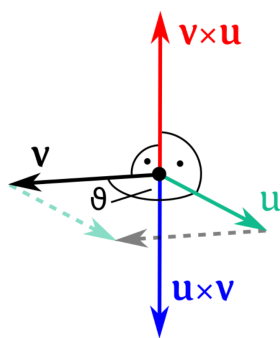
Reciprokfüggvény	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
Exponenciális függvény	$\int e^x dx = e^x + C$
Általános alapú exponenciális függvény	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Színuszfüggvény	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
Koszinuszfüggvény	$\int \cos x dx = \sin x + C$
Newton–Leibniz-tétel	$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

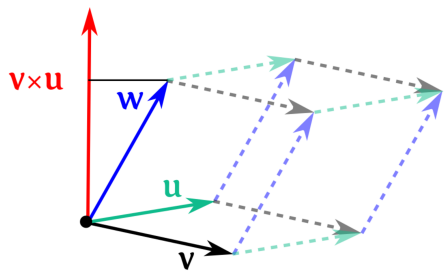
10.7. Numerikus egyenletmegoldási módszerek

Intervallumfelezés	Ha egy folytonos függvény gyökeit keressük, és a függvény $x = x_0$ és $x = x_1$ között előjelet vált, akkor az egyenletnek létezik legalább egy gyöke az (x_0, x_1) intervallumon. Felezzük ezt az intervallumot, és nézzük meg, hogy az így kapott két intervallumon előjelet vált-e a függvény, majd válasszuk azt, amelyikben igen. Az intervallumfelezést ezután tetszőlegesen sokszor ismételjük, amíg meg nem határozzuk a gyököt a kívánt pontossággal.
Fixpont iteráció	Úgy rendezzük az egyenletet, hogy csak az x álljon annak bal oldalán, nevezzük ezt x_{n+1}-nek! Az egyenlet jobb oldalán szereplő x helyére x_n-t írunk. Első iterációs lépésnek x_0 helyére egy sejtést írunk, ami közel lehet a tényleges gyökhöz, majd az összefüggés alapján képezzük x_1-et. Ezután x_n helyére az előző iterációs lépésben kapott értéket írjuk, erre a számológép ANS gombja alkalmas. Addig folytatjuk az iterációt, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük. Ha nem konvergál az egyenlet, rendezzük át másképpen x-re.
Newton-módszer	Rendezzük 0-ra az $f(x)$ függvényt! Ekkor az alábbi iterációs formula alapján keressünk gyököket: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Gyakran gyorsabban konvergál, mint a fixpont iterálás.

10.8. Vektorok

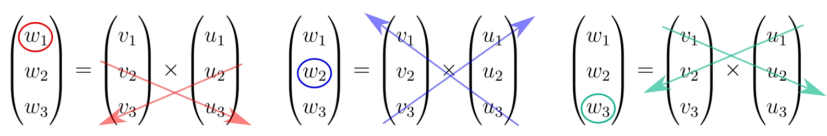
10.8.1. Vektorműveletek geometriai úton

Skalárral szorzás	 Skalárral történő szorzás esetén az eredetivel kollineáris vektort kapunk.
Összeg és különbség	 Két vektor összege a paralelogrammaszabály szerint: a vektorokból képzett paralelogramma átlója adja az eredményt. Másképp: a vektorok egymás után fűzhetők, az így kapott kezdőpontból végpontba mutató vektor az összeg. Különbségre $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$.
Skaláris szorzat	 A $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u}$-ra vett vetületének és $\mathbf{u}$ hosszának szorzata: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cos \vartheta \cdot \mathbf{u}$. Merőleges vektorokra $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}$ pedig negatív, mert $\mathbf{z}$ vetülete ellentétes irányú $\mathbf{u}$-val.
Vektoriális vagy kereszt-szorzat	 A művelet eredménye egy harmadik, a két vektorra merőleges vektor lesz, melynek nagysága $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{u} \sin \vartheta$, vagyis a két vektor által kifeszített paralelogramma előjeles területe. Iránya a jobbkéz-szabály alapján, tehát ha a hüvelykujjunk $\mathbf{v}$, a mutatóujjunk pedig $\mathbf{u}$ irányába mutat, akkor az ezekre merőlegesen tartott középső ujjunk jelöli ki $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ irányát.

Vegyes szorzat	 Három vektor vegyes szorzata $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$, megadja a vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát.
----------------	---

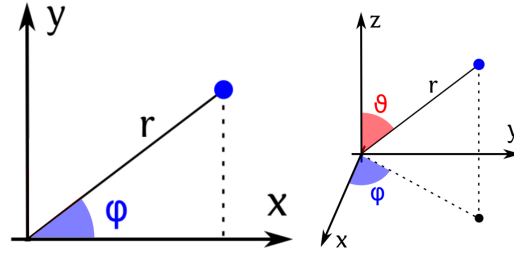
10.8.2. Vektorműveletek reprezentációja

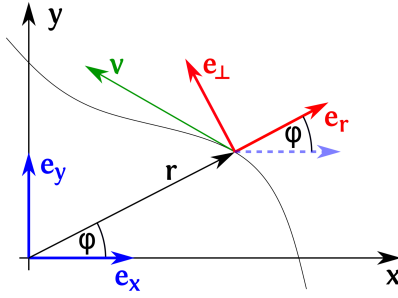
Az alábbi összefüggések az $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]^*$ bázisban megadott általános $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vektorokra vonatkoznak.

Skalárral szorzás	$\lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$
Összeg és különbség	$\mathbf{v} \pm \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_1 \pm u_1 \\ v_2 \pm u_2 \\ v_3 \pm u_3 \end{pmatrix}$
Skaláris szorzat	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$
Vektoriális vagy kereszt-szorzat	$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{pmatrix}$  A jobb oldalra mutató nyilak által érintett elemeket össze kell szorozni, és ebből kivonni a bal oldalra mutató nyilak által érintett elemek szorzatát.

10.8.3. Descartes-féle és polárkoordináta-rendszerek

A következő összefüggések alapjait az alábbi két koordinátarendszer képezi:



Síkbeli polárból Descartes-ba	$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$
Gömbi polárból Descartes-ba	$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ $z = r \cos \vartheta$
Descartes-ból síkbeli polárba	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{ha } x > 0 \text{ és } y \geq 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{ha } x > 0 \text{ és } y < 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{ha } x < 0 \\ \pi/2 & \text{ha } x = 0 \text{ és } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{ha } x = 0 \text{ és } y < 0 \\ \text{nem definiált} & \text{ha } x = 0 \text{ és } y = 0 \end{cases}$
Descartes-ból gömbi polárba	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vartheta = \arctan(z/r)$ φ -re a fenti összefüggést használjuk
Vektor poláris komponensekre bontása 2D-ben	 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\perp$ $\mathbf{e}_r = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_\perp = -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_y$

Köszönetnyilvánítás

A Képletgyűjtemény korábbi változataiért – amelyek jelen kiadás alapjául is szolgáltak – hálás köszönet illeti **Világos Blankát** és **Ványi Andrást**.

A dokumentum digitális környezetének kialakításáért külön elismeréssel tartozom **Varga Vázsonynak**.

A Képletgyűjtemény lektorálásában nyújtott segítségükért köszönet illeti **Kovács Józsefet**, **Takács Dórát**, **Bartucz Eszter Biankát**, valamint ismét Varga Vázsonyt.

Hálás vagyok **Dálya Gergelynek**, amiért engedélyezte, hogy felhasználhassunk ábrákat a *Bevezetés a csillagászatba* c. könyvéből.

Külön köszönet illeti Bartucz Eszter Biankát a Képletgyűjtemény borítójának igényes megtervezéséért.

Hálás vagyok emellett **Jakab Ede Krisztiánnak**, aki az *Égi mechanika* és *Kozmológia* fejezetek összeállításában segített.

A projekt kezdeti szakaszában nyújtott támogatásukért köszönet illeti **Dobák Bálintot** és **Milbik Csongor Lászlót**, akik a releváns képletek gyűjtésében és rendszerezésében segédkeztek.

Végül szeretnék köszönetet mondani mindazon felkészítőknak és diákoknak, akik munkájukkal és észrevételeikkel nagyban hozzájárultak a Képletgyűjtemény létrejöttéhez: Bartucz Eszter Biana, Dálya Gergely, Dobák Bálint, Elekes Panni, Jakab Ede Krisztián, Kovács József, Milbik Csongor László, Varga Vázsony, Világos Blanka.

Továbbá a Képletgyűjtemény korábbi változatainak összeállításában és lektorálásában segédkeztek: Bánhidi Dominik, Bécsy Bence, Bíró Barna, Borkovits Tamás, Dálya Gergely, Gyűrűs Boldizsár, Hegedüs Tibor, Kalup Csilla, Kovács József, Knoch Júlia, Puskás Dávid, Rajmon Imola, Szalai Tamás, Szöllősi Attila, Udvardi Imre, Varga Vázsony, és még sokan mások.

Groningen, 2025. október

Vári Gergely Péter